En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

---

1. Quatres démonstrations d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz

1.I. Variation de la norme selon une droite

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.
On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2 \end{array}$$

1.1. Expliquer pourquoi,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme le carré d'un réel est toujours positif, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(a_k + tb_k)^2 \geq 0$.
Et donc, comme somme de termes positifs, $\boxed{f(t) \geq 0}$.

1.2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2ta_kb_k + t^2b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(2\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right) t + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) t^2 \\ &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ \beta = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\ \gamma = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \end{array}}.$$

1.3. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

- Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, alors comme une somme de termes positifs (car carrés) est nulle ssi tous les termes sont nuls, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = 0$.
  Donc $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = 0$ et $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2} = 0$.
  Ainsi, l'inégalité est vérifiée.
- Sinon, on a par la question **1.2.**, f est une fonction polynomiale du second degré.
  De plus par la question **1.1.**, f est positive.

Ainsi (cf par exemple le TD) son discriminant est négatif, c'est à dire (avec les notations de la question **1.2.**),

$$= \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$$

c'est à dire

$$\left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \leq 0$$

ce qui peut se réécrire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

Par croissance de la fonction racine, on en déduit donc

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}.$$

c'est à dire

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}}.$$

1.II. Optimisation d'une inégalité locale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1.4. Montrer que pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta}\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$$

Soit $\eta > 0$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On a (cf TD)

$$\left(\sqrt{\eta}\alpha - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\beta\right)^2 \geq 0$$

c'est à dire en développant

$$\alpha\beta \leq \eta\alpha^2 + \frac{1}{4\eta}\beta^2.$$

Ainsi on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$a_k b_k \leq \eta (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta}(b_k)^2.$$

Par somme d'inégalités on en déduit donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta}\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

1.5. Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ \eta &\mapsto A\eta + \frac{1}{\eta}B \end{aligned}$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

- **Par étude de fonction**
  Posons

$$g\colon \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+ \\ \eta \mapsto A\eta + \dfrac{1}{\eta}B \end{array}.$$

On a g dérivable (fonctions usuelles) et pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} g'(\eta) &= A - \frac{B}{\eta^2} \\ &= \frac{A\eta^2 - B}{\eta^2}. \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations

η	0		$\sqrt{\frac{B}{A}}$		$+\infty$
$g'(\eta)$	‖	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$2\sqrt{AB}$	↗	$+\infty$

d'où par lecture de tableau de variations, $\boxed{g \text{ admet } 2\sqrt{AB} \text{ comme minimum}}$.

- **Variante: par inégalité**
  On a par inégalité arithmético-géométrique (ou par l'inégalité démontrée à la question **1.4.**), pour tout $\eta > 0$,

$$\sqrt{A\eta \cdot \frac{B}{\eta}} \leq \frac{A\eta + \frac{B}{\eta}}{2}$$

c'est à dire

$$2\sqrt{AB} \leq A\eta + \frac{B}{\eta}.$$

De plus pour $\eta = \sqrt{\frac{B}{A}}$, on a

$$\begin{aligned} = A\sqrt{\frac{B}{A}} + \frac{B}{\sqrt{\frac{B}{A}}} &= \sqrt{AB} + \sqrt{AB} \\ &= 2\sqrt{AB}. \end{aligned}$$

c'est à dire que l'égalité est atteinte.
Par conséquent $\boxed{\text{la fonction admet } 2\sqrt{AB} \text{ comme minimum}}$.

1.6. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}$$

Traitons d'abord le cas où $\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = 0$ ou $\sum_{k=1}^n (b_k)^2 = 0$: une somme de réels positifs étant nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, les a_k (resp. les b_k) sont alors tous nuls, donc $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$ et l'inégalité est vérifiée ($0 \leq 0$).
Supposons désormais $\sum_{k=1}^n (a_k)^2 > 0$ et $\sum_{k=1}^n (b_k)^2 > 0$.
Par la question **1.4.**, on a pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 + \frac{1}{4\eta}\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2.$$

Et par la question **1.5.**, (avec $A = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ et $B = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^n (b_k)^2$), il existe $\eta > 0$ (valant $\sqrt{\frac{B}{A}}$) tel que

$$\eta\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2+\frac{1}{4\eta}\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2=2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}.$$

Par conséquent, en particulier

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}.$$

Il reste alors à obtenir l'inégalité avec la valeur absolue.
Par exemple on a de même,

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k)b_k\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(-a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}$$

c'est à dire

$$-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}}.$$

1.III. Par normalisation

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.
Erreur d'énoncé: On suppose de plus que les deux familles sont non identiquement nulles c'est à dire $(a_1,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$ *et* $(b_1,\dots,b_n)\neq(0,\dots,0)$.
On pose

$$A=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2},\quad B=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.\quad .$$

Ainsi $A\neq0$ *et* $B\neq0$.
1.7. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-\frac{b_k}{B}\right)^2\geq0.$$

Comme le carré d'un réel est toujours positif, comme somme de termes positifs on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-\frac{b_k}{B}\right)^2\geq0}.$$

1.8. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}.$$

En développant on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-\frac{b_k}{B}\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{{a_k}^2}{A^2}-2\frac{a_kb_k}{AB}+\frac{{b_k}^2}{B^2}\right)\\ &= \frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2-2\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\frac{1}{B^2}\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\\ &= \frac{A^2}{A^2}-2\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\frac{B^2}{B^2}\\ &= 2\left(1-\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\end{aligned}$$

et donc par la question **1.7.** on en déduit que

$$1-\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geq 0$$

c'est à dire, comme $AB>0$,

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq AB.$$

De même que pour l'exercice 1.II on remarque qu'en remplaçant pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, b_k par $-b_k$ on obtient de même

$$-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq AB$$

et donc finalement,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}}.$$

1.9. Commenter le lien entre la question **1.7.** et l'exercice 1.I.

On observe, qu'en notant f la fonction définie à l'exercice 1.I, on a f une fonction polynomiale du second degré, toujours positive.
Ainsi, en particulier

$$f\left(-\frac{A}{B}\right)\geq 0$$

c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{A}{B}b_k\right)^2\geq 0$$

ce qui est équivalent à la constation de la question **1.7.**.

1.IV. Par calcul de somme double

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1.10. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2+\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(a_ib_j-a_jb_i)^2\right).$$

On développe le produit

$$\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}{b_j}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}{a_i}^2{b_j}^2\quad .$$

De même

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right).$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j$$

Notons pour $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$c_{i,j} = (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

On constate que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$c_{i,j} = c_{j,i}$$

et

$$c_{i,j} = 0 \text{ si } i = j.$$

Ainsi, par symétrie (faire un schéma)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(a_i b_j - a_j b_i)^2\right) &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} c_{i,j} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} c_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ j<i}} c_{j,i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} c_{i,j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} c_{i,j} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i=j}} 0 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}
\end{aligned}$$

Enfin, comme par symétrie on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 {b_i}^2$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left({a_i}^2 {b_j}^2 - 2a_i b_i a_j b_j + {a_j}^2 {b_i}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 {b_i}^2 \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j\right)
\end{aligned}$$

on conclut bien que

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(a_i b_j - a_j b_i)^2\right)}.$$

1.11. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}.$$

Comme le carré d'un réel est toujours positif et la somme de termes positifs est positive, on a

$$\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(a_i b_j - a_j b_i)^2\right) \geq 0.$$

Par conséquent

$$\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

Par croissance de la fonction racine, on en déduit finalement que

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}}.$$

1.12. Commenter géométriquement l'égalité précédente dans le cas $n = 2$.

Pour $n = 2$ l'égalité s'écrit

$$({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Il y a plusieurs façons d'interpréter de manière géométrique cette égalité.

- En termes **d'affixes**.
  On pose $\alpha = a_1 + i a_2 \in \mathbb{C}$ et $\beta = b_1 + i b_2 \in \mathbb{C}$ on a

  $$|\alpha|^2 |\overline{\beta}|^2 = |\alpha\overline{\beta}|^2.$$

  Or

  $$|\alpha|^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2)$$

  $$|\overline{\beta}|^2 = ({b_1}^2 + {b_2}^2)$$

  et

  $$\alpha\overline{\beta} = (a_1 b_1 + a_2 b_2) - i(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

  d'où

  $$|\alpha\overline{\beta}|^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

  d'où l'interprétation géométrique.
- En termes de **produits scalaires**
  Notons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
  En notant $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \mathbb{R}$, l'égalité peut se réécrire

  $$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \wedge \vec{b})^2.$$

  Dans le cas où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tous les deux non nuls, en notant θ l'angle entre les deux vecteurs on a alors

  $$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos(\theta) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = \vec{a} \wedge \vec{b} &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin(\theta) \end{aligned}$$

  et l'égalité précédente n'est rien d'autres que

  $$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$