# Plusieurs preuves de l'IAG

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

---

## Contexte

Étant donnés $n$ réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, il existe de nombreuses façons de calculer une "moyenne" de ces réels. Parmi les plus courantes on peut citer:

- La moyenne arithmétique
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$
- La moyenne géométrique
$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$
- La moyenne quadratique
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}.$$
- La moyenne harmonique
$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}.$$

L'objectif de ce sujet est de présenter **plusieurs démonstrations indépendantes** de **l'inégalité arithmético-géométrique** (IAG) : la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.
- La partie introductive 0 démontre deux résultats pouvant être utilisés dans les autres parties.
- La partie 1 utilise un schéma de récurrence dit de Fermat pour prouver l'IAG.
- La partie 2 utilise un schéma de récurrence plus classique mais nécessitant une étude de fonction.
- La partie 3 utilise un schéma de récurrence classique et des manipulations algébriques pour démontrer une propriété équivalente à l'IAG.
- La partie 4 démontre directement l'inégalité sans récurrence, à partir d'une simple inégalité sur l'exponentielle.
- La partie 5 (très classique) démontre une inégalité plus générale (dite **inégalité de convexité** appliquée au logarithme) par récurrence pour en déduire ensuite l'IAG.
- Enfin la dernière partie **totalement facultative** vous propose de démontrer, en totale autonomie, un résultat sur les différentes moyennes évoquées.

---

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{P}_n$ la proposition "la moyenne géométrique de $n$ réels strictement positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique" et $\mathcal{Q}_n$ la proposition "si le produit de $n$ réels strictement positifs est égal à 1 alors leur somme est supérieure à $n$", c'est à dire:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k = 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n\right). \tag{$\mathcal{Q}_n$}$$

---

## 0 Introduction

**0.1.** Montrer $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
**0.2.** Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \Leftrightarrow \mathcal{Q}_n.$$

**On pourra utiliser les questions 0.1. et 0.2. dans les parties suivantes.**
**Les parties 1, 2, 3,4 et 5, sont indépendantes entre elles.**

# 1 Méthode de Fermat

**1.3.** Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide de $\mathcal{P}_2$, que $\mathcal{P}_{2^r} \Rightarrow \mathcal{P}_{2^{r+1}}$.
**1.4.** En déduire que

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_{2^r}.$$

**1.5.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $\mathcal{P}_N$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq N$ et soit $(x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n$ fixé.
**1.2.1.** Montrer, à l'aide de $\mathcal{P}_N$, que pour tout $\lambda > 0$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{N}} \lambda^{1-\frac{n}{N}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\lambda. \tag{1}$$

**1.2.2.** En évaluant l'inégalité de la question **1.2.1.** en un $\lambda$ bien choisi, montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

**1.6.** Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_N \Rightarrow (\forall n \in [\![1, N]\!], \mathcal{P}_n).$$

**1.7.** Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

# 2 Étude de fonction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n$. On définit la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{n+1}\left(t + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \left(t \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}}. \end{array}$$

**2.8.** Expliciter deux réels $\alpha$ et $\gamma$ tels que, pour tout $t \in ]0, \infty[$,

$$\varphi(t) = \frac{n}{n+1}\alpha + \frac{1}{n+1}t - \gamma^{\frac{n}{n+1}} \cdot t^{\frac{1}{n+1}}.$$

**2.9.** Justifier brièvement que $\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
**2.10.** Montrer que $\varphi$ admet un minimum global et déterminer ce minimum en fonction de $n$, $\alpha$ et $\gamma$.
**2.11.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.
**2.12.** Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

# 3 Factorisation et regroupement

**3.13.** Soient $m$ et $M$ deux réels tels que $0 \leq m \leq 1 \leq M$.
Montrer, à l'aide d'une factorisation, que

$$-1 + m + M - mM \geq 0.$$

**3.14.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in ]0, +\infty[^{n+1}$.
Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \geq 1\right) \Rightarrow \max(x_1, \dots, x_{n+1}) \geq 1.$$

et que

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \leq 1\right) \Rightarrow \min(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1.$$

**3.15.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in ]0, +\infty[^{n+1}$ et $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Montrer que

$$\left(\prod_{k\in[\![1,n+1]\!]} x_k = 1\right) \Rightarrow \left(\left(\sum_{k\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{i,j\}} x_k\right) + x_i x_j \geq n\right).$$

**3.16.** En utilisant les questions précédentes montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}.$$

**3.17.** Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

## 4 Une preuve directe: la méthode de Polya

**4.18.** En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t) \geq 1 + t.$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

**4.19.** Déduire de la question précédente que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t) \geq \exp(1) \times t.$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

**4.20.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in ]0, +\infty[^n$.
Montrer que

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \exp(n) \times \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

**4.21.** En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

## 5 Cas plus général: une inégalité de convexité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}_n$ la proposition suivante

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, \ldots, x_n) \in ]0, +\infty[^n,\ \forall (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n \text{ t.q } \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \\ &\ln\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} t_k \ln(x_k). \end{aligned} \tag{$\mathcal{H}_n$}$$

**5.22.** Soit $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$. Montrer que

$$\forall t \in [0,1],\ \ln\left(ta + (1-t)b\right) \geq t\ln(a) + (1-t)\ln(b)$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

**5.23.** En déduire $\mathcal{H}_2$.

**5.24.** Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

**5.25.** En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

---

## 6 Facultatif: en autonomie

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in ]0, +\infty[^n$.
Montrer que

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} \leq \max(x_1, \ldots, x_n).$$

*Toute piste de recherche correctement présentée et rédigée sera valorisée.*