En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Étant donnés n réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, il existe de nombreuses façons de calculer une "moyenne" de ces réels. Parmi les plus courantes on peut citer:

- La moyenne arithmétique
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$
- La moyenne géométrique
$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$
- La moyenne quadratique
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}.$$
- La moyenne harmonique
$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}.$$

L'objectif de ce sujet est de présenter **plusieurs démonstrations indépendantes** de **l'inégalité arithmético-géométrique** (IAG) : la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.
- La partie introductive 0 démontre deux résultats pouvant être utilisés dans les autres parties.
- La partie 1 utilise un schéma de récurrence dit de Fermat pour prouver l'IAG.
- La partie 2 utilise un schéma de récurrence plus classique mais nécessitant une étude de fonction.
- La partie 3 utilise un schéma de récurrence classique et des manipulations algébriques pour démontrer une propriété équivalente à l'IAG.
- La partie 4 démontre directement l'inégalité sans récurrence, à partir d'une simple inégalité sur l'exponentielle.
- La partie 5 (très classique) démontre une inégalité plus générale (dite **inégalité de convexité** appliquée au logarithme) par récurrence pour en déduire ensuite l'IAG.
- Enfin la dernière partie **totalement facultative** vous propose de démontrer, en totale autonomie, un résultat sur les différentes moyennes évoquées.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{P}_n$ la proposition "la moyenne géométrique de n réels strictement positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique" et $\mathcal{Q}_n$ la proposition "si le produit de n réels strictement positifs est égal à 1 alors leur somme est supérieure à n", c'est à dire:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k = 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n\right). \tag{$\mathcal{Q}_n$}$$

---

0 Introduction

0.1. Montrer $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

La proposition $\mathcal{P}_1$ s'écrit tout simplement
$$\forall x_1 > 0,\ (x_1)^1 \leq \frac{1}{1} x_1$$
ce qui est vrai car pour tout réel x_1, $x_1 \leq x_1$.
D'où $\boxed{\mathcal{P}_1}$.
Il y a de nombreuses façons de démontrer $\mathcal{P}_2$.
On peut par exemple remarquer que pour tous réels a et b, un carré étant toujours positif,
$$(a-b)^2 \geq 0$$
ce qui donne en développant
$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

ou encore

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Et donc pour tout $(x_1, x_2) \in]0, +\infty[^2$, en appliquant l'inégalité précédente avec $a = \sqrt{x_1}$ et $b = \sqrt{x_2}$, on obtient

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq \frac{\sqrt{x_1}^2}{2} + \frac{\sqrt{x_2}^2}{2}$$

i.e

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ce qui est bien $\boxed{\mathcal{P}_2}$.

0.2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \Leftrightarrow \mathcal{Q}_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On procède par double implication.

- $\boxed{\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_n}$
  Supposons $\mathcal{P}_n$.
  Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ tels que

  $$\prod_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

  Alors par $\mathcal{P}_n$,

  $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

  et donc (car n est positif),

  $$\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n.$$

- $\boxed{\mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{P}_n}$
  Supposons $\mathcal{Q}_n$.
  Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
  Posons

  $$\gamma = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} > 0$$

  et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

  $$y_k = \frac{x_k}{\gamma} > 0.$$

  Alors

  $$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} y_k &= \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma^n}\prod_{k=1}^{n} x_k \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{n}{n}}}\prod_{k=1}^{n} x_k \\ &= 1.\end{aligned}$$

  D'où par $\mathcal{Q}_n$ appliqué à $(y_1, \ldots, y_n)$ (qui sont bien des nombres strictement positifs de produit 1) on a

  $$\sum_{k=1}^{n} y_k \geq n$$

  c'est à dire

  $$\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

On a donc bien montré $\mathcal{P}_n$.

On pourra utiliser les questions 0.1. et 0.2. dans les parties suivantes.
Les parties 1, 2, 3,4 et 5, sont indépendantes entre elles.

1 Méthode de Fermat

1.3. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide de $\mathcal{P}_2$, que $\mathcal{P}_{2^r} \Rightarrow \mathcal{P}_{2^{r+1}}$.

Supposons $\mathcal{P}_{2^r}$ vraie.
Soit $(x_1, \dots, x_{2^{r+1}}) \in]0, +\infty[^{2^{r+1}}$.
On sépare ces 2^{r+1} réels en deux groupes: ceux d'indice $\leq 2^r$ et ceux d'indice $\geq 2^r + 1$.
Chaque groupe contient alors exactement 2^r éléments (car $2^r - 1 + 1 = 2^{r+1} - (2^r + 1) + 1 = 2^r$) et donc, **par** $\mathcal{P}_{2^r}$ on a

$$\left(\prod_{k=1}^{2^r} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}} \leq \frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=1}^{2^r} x_k\right)$$

et

$$\left(\prod_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}} \leq \frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right).$$

D'où en appliquant $\mathcal{P}_2$ à ces deux réels positifs:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\prod_{k=1}^{2^r} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}}\left(\prod_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}}} &\leq \frac{1}{2}\left(\left(\prod_{k=1}^{2^r} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}} + \left(\prod_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}}\right) \quad \text{par } \mathcal{P}_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=1}^{2^r} x_k\right) + \frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)\right) \quad \text{par les inégalités précédentes}\end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{\left(\prod_{k=1}^{2^r} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}}\left(\prod_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^r}}} = \left(\prod_{k=1}^{2^{r+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2\cdot 2^r}}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=1}^{2^r} x_k\right) + \frac{1}{2^r}\left(\sum_{k=2^r+1}^{2^{r+1}} x_k\right)\right) = \frac{1}{2\cdot 2^r}\sum_{k=1}^{2^{r+1}} x_k.$$

On obtient donc $\mathcal{P}_{2^{r+1}}$.
On a donc bien montré $\boxed{\mathcal{P}_{2^r} \Rightarrow \mathcal{P}_{2^{r+1}}}$.

1.4. En déduire que

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_{2^r}.$$

On pose pour $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_r = \mathcal{P}_{2^r}$. Montrons par récurrence sur r que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_r$ est vraie.
- **Initialisation** $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}_1$ est vraie par la question **0.1.**.
- **Hérédité** Soit $r \in \mathbb{N}$. Alors par la question **1.3.** $\mathcal{T}_r \implies \mathcal{T}_{r+1}$.
- **Conclusion** Par récurrence on a donc $\forall r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_r$ est vraie, c'est à dire $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_{2^r} \text{ est vraie}}$.

1.5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $\mathcal{P}_N$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq N$ et soit $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ fixé.
1.2.1. Montrer, à l'aide de $\mathcal{P}_N$, que pour tout $\lambda > 0$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{N}} \lambda^{1-\frac{n}{N}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\lambda. \tag{1}$$

Soit $\lambda > 0$.
En appliquant $\mathcal{P}_N$ à $(x_1, \dots, x_n, \lambda, \dots, \lambda) \in]0, \infty[^N$ (constitué de $x_1, \dots, x_n$ puis de $N-n$ fois λ) on obtient

$$\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{N} \lambda\right)\right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{N} \lambda\right)\right)$$

c'est à dire

$$\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\lambda^{N-n}\right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + (N-n)\lambda\right).$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{N}} \lambda^{1-\frac{n}{N}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\lambda}.$$

1.2.2. En évaluant l'inégalité de la question **1.2.1.** en un λ bien choisi, montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

L'inégalité (1) est vraie $\forall \lambda > 0$, et en particulier en prenant $\lambda = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1-\frac{n}{N}}{n}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

c'est à dire, comme $\frac{1}{N} + \frac{1-\frac{n}{N}}{n} = \frac{1}{n}$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

i.e

$$\frac{n}{N}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

ce qui est équivalent à

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}.$$

1.6. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_N \Rightarrow (\forall n \in [\![1, N]\!], \mathcal{P}_n).$$

Il s'agit juste d'une reformulation de la question **1.5.**: on a fixé N, supposé $\mathcal{P}_N$ pour ensuite en déduire pour tout $n \leq N$, $\mathcal{P}_n$.
On a donc bien montré

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_N \Rightarrow (\forall n \in [\![1, N]\!], \mathcal{P}_n)}.$$

1.7. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $2^r \geq n$ (un tel r existe bien car $\lim_{r \to +\infty} 2^r = +\infty$). Alors par la question 2, on sait que $\mathcal{P}_{2^r}$ est vraie, et donc par la question précédente, $\mathcal{P}_n$ est vraie. Comme n est arbitraire on a donc:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie}}.$$

2 Étude de fonction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$. On définit la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{n+1}\left(t + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \left(t \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \end{array}.$$

2.8. Expliciter deux réels α et γ tels que, pour tout $t \in]0, \infty[$,

$$\varphi(t) = \frac{n}{n+1}\alpha + \frac{1}{n+1}t - \gamma^{\frac{n}{n+1}} \cdot t^{\frac{1}{n+1}}.$$

On a pour tout $t \in]0, \infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{n+1}\left(t + \sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \left(t \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n+1}t - \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}} \cdot t^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{n}{n+1}\alpha + \frac{1}{n+1}t - \gamma^{\frac{n}{n+1}} \cdot t^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right), \qquad \gamma = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

2.9. Justifier brièvement que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

La fonction φ est la somme d'une fonction affine et d'une fonction de la forme $t \mapsto t^a$, $a > 0$. Elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{n+1} - \gamma^{\frac{n}{n+1}}\frac{1}{n+1}t^{\frac{1}{n+1}-1}$$

c'est à dire

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \gamma^{\frac{n}{n+1}}t^{-\frac{n}{n+1}}\right)}.$$

2.10. Montrer que φ admet un minimum global et déterminer ce minimum en fonction de n, α et γ.

On a donc pour tout $t > 0$, $\varphi'(t)$ du même signe que $1 - \left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\frac{n}{n+1}}$. On obtient donc le tableau de variations

t	0		γ		$+\infty$
$\varphi'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	‖	↘	$\varphi(\gamma)$	↗	

Donc, par lecture de tableau de variation, φ admet un minimum en $t = \gamma$. Et comme

$$\varphi(\gamma) = \frac{n}{n+1}\alpha + \frac{1}{n+1}\gamma - \gamma^{\frac{n}{n+1}} \cdot \gamma^{\frac{1}{n+1}} = \frac{n}{n+1}(\alpha - \gamma)$$

on en déduit

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \varphi(t) \geq \varphi(\gamma) = \frac{n}{n+1}(\alpha - \gamma)}.$$

2.11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}_n$.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$. Définissons φ comme aux questions précédentes.
Soit $x_{n+1} \in]0, +\infty[$.
Alors, d'après la question précédente, on a

$$\varphi(x_{n+1}) \geq \frac{n}{n+1}(\alpha - \gamma)$$

et par $\mathcal{P}_n$, on a

$$\alpha = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \gamma$$

et donc en particulier

$$\varphi(x_{n+1}) \geq 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n+1}\left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \left(x_{n+1}\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

On vient donc de démontrer que, à n fixé, à $(x_1, \dots, x_n)$ fixé, si $\mathcal{P}_n$, alors $\forall x_{n+1} > 0$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

C'est à dire, comme $\mathcal{P}_n$ ne dépend que de n

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}}.$$

2.12. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On a $\mathcal{P}_1$ est vraie par la question **0.1.** et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ par la question **2.11.**. Donc par **récurrence** sur n on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_n}.$$

3 Factorisation et regroupement

3.13. Soient m et M deux réels tels que $0 \leq m \leq 1 \leq M$.
Montrer, à l'aide d'une factorisation, que

$$-1 + m + M - mM \geq 0.$$

On a

$$-1 + m + M - mM = (M-1)(1-m)$$

et $(1-m) \geq 0$, $(M-1) \geq 0$ et donc, en tant que produit de deux termes positifs, on a

$$\boxed{-1 + m + M - mM \geq 0}.$$

3.14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in]0, +\infty[^{n+1}$.
Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \geq 1\right) \Rightarrow \max(x_1, \dots, x_{n+1}) \geq 1.$$

et que

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \leq 1\right) \Rightarrow \min(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1.$$

Apparté: Profitons de cette question pour rappeler comment quantifier les inégalités avec des max/min.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$, $A \subset E$ et $\beta \in E$. Si $\min(A)$ et $\max(A)$ sont définis, alors

$$\begin{aligned}\max(A) \leq \beta &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ x \leq \beta\\ \max(A) \geq \beta &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ x \geq \beta\\ \min(A) \geq \beta &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ x \geq \beta\\ \min(A) \leq \beta &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ x \leq \beta.\end{aligned}$$

Procédons par **contraposée**.

- Supposons que $\max(x_1, \dots, x_{n+1}) < 1$ c'est à dire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, x_k < 1.$$

Comme de plus pour tout k, $x_k > 0$, par produit (fini) d'inégalités de termes **positifs** on en déduit

$$0 \leq \prod_{k=1}^{n+1} x_k < \prod_{k=1}^{n+1} 1$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k < 1.$$

On a donc montré

$$\max(x_1, \dots, x_{n+1}) < 1 \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k < 1\right)$$

ce qui est bien la contraposée de

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \geq 1\right) \Rightarrow \max(x_1, \dots, x_{n+1}) \geq 1}.$$

- De même, supposons que $\min(x_1, \dots, x_{n+1}) > 1$ c'est à dire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, x_k > 1.$$

Alors par produit (fini) d'inégalités de termes **positifs** on en déduit

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k > \prod_{k=1}^{n+1} 1$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k > 1.$$

On a donc montré

$$\min(x_1, \dots, x_{n+1}) > 1 \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k > 1\right)$$

ce qui est bien la contraposée de

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \leq 1\right) \Rightarrow \min(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1}.$$

3.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in]0, +\infty[^{n+1}$ et $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
Montrer que

$$\left(\prod_{k \in [\![1, n+1]\!]} x_k = 1\right) \Rightarrow \left(\left(\sum_{k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{i,j\}} x_k\right) + x_i x_j \geq n\right).$$

Considérons le n-uplet constitués du produit $(x_i x_j)$ et des x_k pour $k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{i, j\}$.
Comme

$$(x_i x_j) \times \prod_{\substack{k\in\{1,\dots,n+1\}\\ k\neq i\\ k\neq j}} x_k = 1$$

est un produit de n termes valant 1, par $\mathcal{Q}_n$ on obtient

$$(x_i x_j) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n+1\}\\ k\neq i\\ k\neq j}} x_k \geq n.$$

C'est donc bien le résultat recherché.

3.16. En utilisant les questions précédentes montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vérifiée.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in]0, +\infty[^{n+1}$ tel que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$.
Le maximum et le minimum d'un ensemble fini de réels sont toujours définis, soient donc i et j tels que

$$x_i = \max(x_1, \dots, x_{n+1})$$
$$x_j = \min(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Remarque: on commence ici par traiter en détails le cas très particulier où $i = j$. En pratique il est peut être plus rentable de le traiter plus rapidement. Par exemple en une phrase comme:
«Si $i = j$ alors tous les x_k sont égaux, comme ce sont des nombres positifs de produit 1 ils sont donc tous égaux à 1 et alors l'inégalité est bien vraie.»

- Si $i = j$ alors comme le maximum est égal au minimum, tous les x_k sont égaux c'est à dire il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que
$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\},\ x_k = c.$$
Donc en particulier
$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k = c^{n+1} = 1$$
et comme $c > 0$ on en déduit
$$c = 1$$
d'où
$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = (n+1) \times 1 \geq n+1.$$
- Si $i \neq j$, d'après la question **3.15.** on obtient
$$\left(\sum_{k\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{i,j\}} x_k \right) + x_i x_j \geq n$$
et donc
$$\left(\sum_{k\in[\![1,n+1]\!]} x_k \right) - x_i - x_j + x_i x_j \geq n$$
ce qui peut se réécrire
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right) \geq n + 1 + (-1 + x_i + x_j - x_i x_j).$$
Or d'après **3.14.** on a
$$x_i \geq 1 \text{ et } x_j \leq 1$$
et donc par **3.13.**
$$-1 + x_i + x_j - x_i x_j \geq 0.$$
On en déduit donc bien
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right) \geq n+1.$$

Dans tous les cas on a donc la somme plus grande que $n+1$ si le produit est 1.
On a donc bien démontré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}}.$$

3.17. Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$.
- **Initialisation** La proposition $\mathcal{Q}_1$ est $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$ qui est vraie (car $1 \geq 1$).
- **Hérédité** Il s'agit exactement de la question **3.16.**.
- **Conclusion** On a donc par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n.$$

Comme de plus on a montré à la question **0.2.** que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n \Leftrightarrow \mathcal{Q}_n$$

on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n}.$$

4 Une preuve directe: la méthode de Polya

4.18. En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t) \geq 1 + t.$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

Soit

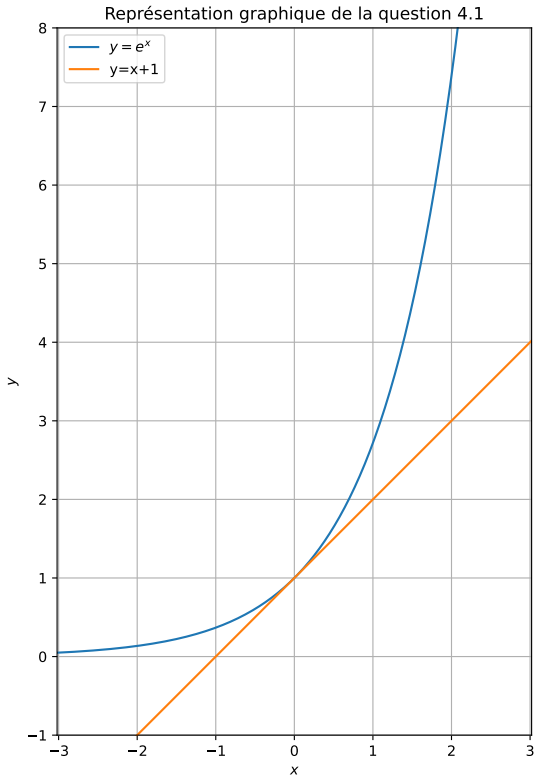
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t - 1 - t. \end{array}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions usuelles dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = e^t - 1$. Comme exp est croissante et $e^0 = 1$, on obtient donc le tableau de variations suivant

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	↘		$f(0)=0$	↗	

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t}.$$



4.19. Déduire de la question précédente que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t) \geq \exp(1) \times t.$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

Soit $t \in \mathbb{R}$.
D'après l'inégalité de la question **4.18.** appliquée à $t-1$ on a

$$e^{t-1} \geq (t-1)+1$$

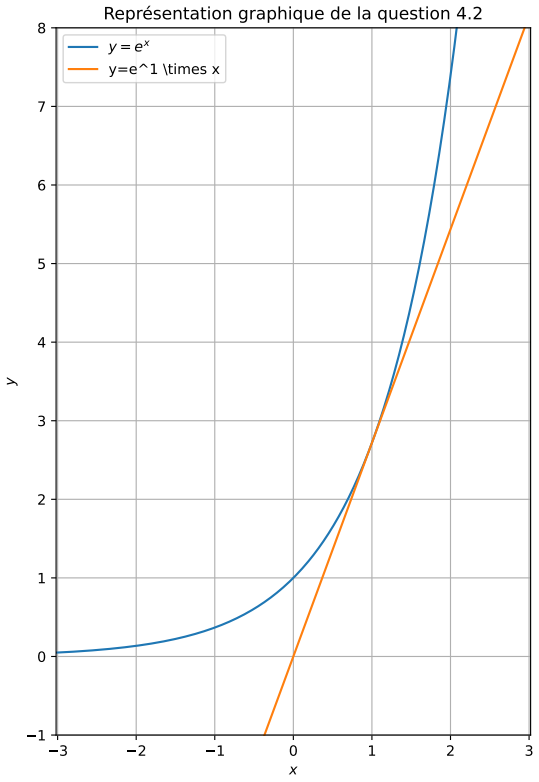
i.e

$$e^t e^{-1} \geq t$$

ou encore

$$\boxed{e^t \geq e^1 t}.$$

Remarque: On aurait aussi pu refaire une étude de fonction mais cela est (un peu) plus long.



4.20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
Montrer que

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \exp(n) \times \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

D'après la question **4.19.**, on a, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$e^{x_k} \geq e^1 x_k > 0.$$

Par produit d'inégalités à termes **positifs** on en déduit

$$\prod_{k=1}^{n} e^{x_k} \geq \prod_{k=1}^{n} e^1 x_k$$

ce qui donne en calculant chacun des produits

$$\boxed{\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \exp(n) \times \prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

4.21. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On va en fait montrer $\mathcal{Q}_n$.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ tel que

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Alors par l'inégalité de la question **4.20.** on a

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \exp(n) \times \prod_{k=1}^{n} x_k = e^n.$$

Comme tous les termes sont strictement positifs et la fonction ln est **croissante** sur $]0,+\infty[$, on en déduit

$$\ln\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \geq \ln\left(e^n\right)$$

c'est à dire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq n.$$

On a donc bien montré $\mathcal{Q}_n$.
Et donc d'après la question **0.2.**, on a bien $\boxed{\mathcal{P}_n}$.

5 Cas plus général: une inégalité de convexité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}_n$ la proposition suivante

$$\begin{aligned} &\forall (x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n,\ \forall (t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n \text{ t.q } \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \\ &\ln\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} t_k \ln(x_k). \end{aligned} \tag{$\mathcal{H}_n$}$$

5.22. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que

$$\forall t \in [0,1],\ \ln\left(ta+(1-t)b\right) \geq t\ln(a) + (1-t)\ln(b)$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

Il s'agit de la très classique inégalité de convexité (ou pour être exact de **concavité**) du logarithme.
On peut par exemple effectuer une étude de fonction.
Soit

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln\left(ta+(1-t)b\right) - \left(t\ln(a)+(1-t)\ln(b)\right) \end{array}.$$

Alors f est deux fois dérivable comme fonction usuelle et on a

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(b) - \ln(b) = 0 \\ f(1) &= \ln(a) - \ln(a) = 0. \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = \frac{a-b}{(a-b)t+b} - \ln(a) + \ln(b)$$

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = -\frac{(a-b)^2}{\left((a-b)t+b\right)^2} \leq 0.$$

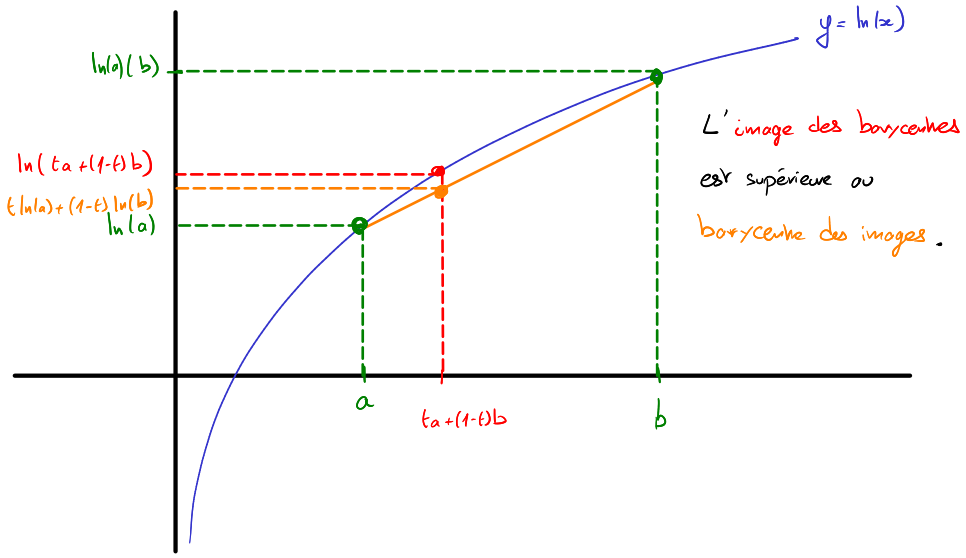
On en déduit le tableau de variations

t	0		1
$f''(t)$	$-$		
f'	↘		
$f'(t)$	$+$	0	$-$
f	0 ↗		↘ 0

et donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \geq 0$ c'est à dire

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ \ln\left(ta + (1-t)b\right) \geq t\ln(a) + (1-t)\ln(b)}.$$

Graphiquement cette inégalité est celle de la concavité de ln: le barycentre des images par la fonction ln est en dessous de l'image du barycentre.



5.23. En déduire $\mathcal{H}_2$.

Soient $(x_1, x_2) \in]0,+\infty[^2$ et $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$.
Alors $t_2 = 1 - t_1$ et en appliquant l'inégalité précédente avec $a = x_1$, $b = x_2$, $t = t_1$ et par conséquent $1 - t = t_2$ on obtient le résultat recherché.
D'où $\boxed{\mathcal{H}_2}$.

5.24. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

On procède par **récurrence sur** $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, on a bien pour tout x_1, $\ln(x_1) \geq \ln(x_1)$ d'où le résultat.
  Pour $n = 2$ il s'agit de la question précédente.
- **Hérédité**
  Soit $n \geq 2$, et supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
  Soient $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in]0,+\infty[^{n+1}$ et $(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$.
  Si $t_{n+1} = 1$ alors le résultat est immédiat. Dans la suite on suppose $\sum_{i=1}^{n} t_i \neq 0$.
  L'idée clef est de remarquer que (il s'agit de l'associativité du barycentre)

$$\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) + t_{n+1}x_{n+1}$$

et

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) + t_{n+1}.$$

Et, par $\mathcal{H}_2$ on a

$$\ln\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) + t_{n+1}\ln(x_{n+1})$$

tandis que par $\mathcal{H}_n$, comme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = 1$$

on a

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i}\ln(x_k).$$

Par conséquent en utilisant les deux inégalités précédentes
on a

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &= \ln\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right)\\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i} x_k\right) + t_{n+1}\ln(x_{n+1})\\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{i=1}^{n} t_i}\ln(x_k)\right) + t_{n+1}\ln(x_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} t_k \ln(x_k)\end{aligned}$$

et donc, comme c'est le cas pour tous les $(x_k)_{1\leq k\leq n+1}$ et $(t_k)_{1\leq k\leq n+1}$ vérifiant les conditions, on a bien $\mathcal{H}_{n+1}$.

► **Conclusion**
On a donc montré $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{H}_n$ implique $\mathcal{H}_{n+1}$.
Par récurrence on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n}.$$

5.25. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
Posons pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$t_k = \frac{1}{n}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

et donc d'après $\mathcal{H}_n$

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(x_k)$$

d'où par **croissance** de exp,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \geq \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

D'où le $\boxed{\text{résultat}}$.

---

6 Facultatif: en autonomie

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
Montrer que

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} \leq \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Toute piste de recherche correctement présentée et rédigée sera valorisée.

On peut commencer par identifier les inégalités à démontrer pour traiter d'abord les plus abordables:

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \underbrace{\leq}_{(I)} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \underbrace{\leq}_{(II)} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \underbrace{\leq}_{(III)} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\leq}_{(IV)} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} \underbrace{\leq}_{(V)} \max(x_1, \ldots, x_n).$$

- L'inégalité $\boxed{(III)}$ est l'IAG déjà démontrée (de 5 manières différentes) dans le DM.
- Pour l'inégalité $\boxed{(V)}$ on pose
$$M = \max(x_1, \dots, x_n)$$
et on remarque que, par définition,
$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ 0 < x_k \leq M$$
et que comme la fonction $\xi \mapsto \xi^2$ est croissante sur $]0, +\infty[$ on en déduit
$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ x_k^2 \leq M^2.$$
Par somme d'inégalités on obtient alors
$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} M^2 = nM^2$$
d'où $(n > 0)$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq M^2$$
et par croissance de $\xi \mapsto \sqrt{\xi}$ sur $]0, +\infty[$,
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \sqrt{M^2}$$
et on conclut en remarquant que comme $M > 0$,
$$\sqrt{M^2} = M.$$
- L'inégalité $\boxed{(I)}$ est en tout point similaire: en posant
$$m = \min(x_1, \dots, x_n)$$
et comme
$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ 0 < m \leq x_k$$
,par décroissance de $\xi \mapsto \dfrac{1}{\xi}$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit
$$\forall k \in \{1, \dots, n\} 0 < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{m}$$
puis par somme d'inégalités
$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m} = n\frac{1}{m}$$
c'est à dire
$$0 < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{m}.$$
Alors, par décroissance de $\xi \mapsto \dfrac{1}{\xi}$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit
$$m \leq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$
ce qui est bien l'inégalité recherchée.
- Pour l'inégalité $\boxed{(IV)}$, il s'agit d'une **inégalité de convexité de la fonction** $\xi \mapsto \xi^2$.
Plus précisément on effectue une étude en tout point similaire à celle de la partie 5 dont voici les grandes lignes:
▷ On a, par développement ou étude de fonction, pour tout $(a, b) \in [0, +\infty[^2$,
$$\forall t \in [0, 1],\ (ta + (1-t)b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2.$$
▷ Alors par récurrence (qui est le copier-coller de la question **5.24.** en remplaçant $\ln(\cdot)$ par $(\cdot)^2$ et $\geq$ par $\leq$) sur $n \in \mathbb{N}^*$

on a

$$\forall n \in \mathbb{N},$$
$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in [0,+\infty[^n, \forall (t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n \text{ t.q } \sum_{k=1}^n t_k = 1,$$
$$\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n t_k (x_k)^2.$$

▷ Et de même en posant, à n et $(x_1,\dots,x_n)$ fixés, en posant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $t_k = \frac{1}{n}$ on en déduit, comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$,

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^2.$$

Alors par croissance de la racine sur $[0,+\infty[$, et comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \geq 0$, on en déduit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n {x_k}^2}.$$

- Enfin pour l'inégalité $\boxed{(II)}$ on remarque que comme pour tout k, $\frac{1}{x_k} > 0$, d'après l'IAG appliquée à $\left(\frac{1}{x_k}\right)_{1\leq k\leq n}$,

$$0 < \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

or

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}}$$

et par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a donc

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Bonus: On pourrait aller plus loin et s'intéresser pour tout $p \neq 0$ à

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En effet le cas $p = 1$ correspond à la moyenne arithmétique, le cas $p = 2$ à la moyenne quadratique et le cas $p = -1$ à la moyenne harmonique.
Le lien avec le reste de la partie étant contenu dans les trois exercices suivants (pouvant être traités de manière indépendante):

- Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max(x_1,\dots,x_n)$$
$$\lim_{p\to-\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \min(x_1,\dots,x_n).$$

- Montrer que

$$\lim_{\substack{p\to 0\\ p\neq 0}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

- Montrer que la fonction

$$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est croissante.