On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif des DMs **facultatifs** est de s'entraîner sur des problématiques légèrement différentes de celles du DM obligatoire, par exemple par des moins guidées et nécessitent plus d'autonomie que celles du DM obligatoire ou des thématiques moins courantes. Par conséquent n'hésitez pas à travailler en groupe ou à me poser des questions si vous êtes bloqués.
Dans ce DM facultatif on s'intéresse à une généralisation des notions de moyennes étudiées dans le DM obligatoire et en particulier on démontre une inégalité généralisant l'IAG.

---

1. Généralisation de l'IAG

Dans toute cette partie on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
Pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ on définit la p-moyenne de $(x_1, \dots, x_n)$ par

$$\mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} {x_k}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par exemple
- $\mathrm{M}_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ est la moyenne arithmétique de $(x_1, \dots, x_n)$,
- $\mathrm{M}_2(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$ est la moyenne quadratique de $(x_1, \dots, x_n)$,
- $\mathrm{M}_{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right)^{-1}$ est la moyenne harmonique de $(x_1, \dots, x_n)$.

1.I. Moyennes limites

1.1. Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n).$$

1.2. Montrer que

$$\lim_{p \to -\infty} \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n).$$

1.3. Montrer que

$$\lim_{p \to 0} \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

On notera, dans la suite de la question **1.3.**,

$$\mathrm{M}_0(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

1.II. Monotonie des moyennes

1.4. Soit $p > 1$.
Montrer que

$$\mathrm{M}_1(x_1, \dots, x_n) \leq \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n).$$

1.5. En déduire que

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

est croissante sur $]0,+\infty[$.

1.6. Conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

1.7. Commenter.