En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

1. Généralisation de l'IAG

Dans toute cette partie on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
Pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ on définit la p-moyenne de $(x_1, \dots, x_n)$ par

$$\mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par exemple
- $\mathrm{M}_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est la moyenne arithmétique de $(x_1, \dots, x_n)$,
- $\mathrm{M}_2(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$ est la moyenne quadratique de $(x_1, \dots, x_n)$,
- $\mathrm{M}_{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$ est la moyenne harmonique de $(x_1, \dots, x_n)$.

1.I. Moyennes limites

1.1. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Soit $\alpha = \max(x_1, \dots, x_n)$.
Soit $p > 0$.
- Par définition du maximum,

  $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \leq \alpha.$$

  Comme $x \mapsto x^p$ est croissante sur $]0, +\infty[$ on a,

  $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ {x_k}^p \leq \alpha^p.$$

  et par conséquent (somme d'inégalités),

  $$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha^p$$

  d'où

  $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p \leq \alpha^p$$

  et comme $\frac{1}{p} > 0$ la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ d'où

  $$\mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha.$$

- De même, comme tous les termes sont positifs et qu'au moins un des termes est égal à α on a

  $$(n-1) \times 0 + \alpha^p \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^p$$

  d'où

  $$\frac{1}{n}\alpha^p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p$$

  et par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ sur $]0, +\infty[$,

  $$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\alpha \leq \mathrm{M}_p(x_1, \dots, x_n).$$

On a donc montré que

$$\boxed{\forall p>0,\ \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\alpha \leq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \leq \alpha}.$$

De plus, lorsque $p \to +\infty$, on a $\frac{1}{p} \to 0$ et par conséquent

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1.$$

Par conséquent on a $\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\alpha \xrightarrow[p\to+\infty]{} \alpha$ et $\alpha \xrightarrow[p\to+\infty]{} \alpha$ d'où par théorème des gendarmes,

$$\boxed{\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \alpha}.$$

1.2. Montrer que

$$\lim_{p\to-\infty} \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) = \min(x_1,\dots,x_n).$$

▷ **Première méthode**
Une méthode est d'effectuer le même encadrement que précédemment à la différence que pour $p<0$ les fonctions puissances considérées sont décroissantes.
Soit $\beta = \min(x_1,\dots,x_n)$.
Soit $p<0$.
▷ Par définition du minimum, on a

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k \geq \beta.$$

Comme $x \mapsto x^p$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ on a,

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ {x_k}^p \leq \beta^p.$$

et par conséquent (somme d'inégalités),

$$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p \leq \sum_{k=1}^{n} \beta^p$$

d'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p \leq \beta^p$$

et comme $\frac{1}{p}<0$ la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ d'où

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \beta.$$

▷ De même, comme tous les termes sont positifs et qu'au moins un des termes est égal à β on a

$$(n-1)\times 0 + \beta^p \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^p$$

d'où

$$\frac{1}{n}\beta^p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p$$

et par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ sur $]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\beta \geq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n).$$

On a donc montré que

$$\boxed{\forall p<0,\ \beta \leq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\beta}.$$

De plus, lorsque $p \to -\infty$, on a $\frac{1}{p} \to 0$ et par conséquent

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow[p\to-\infty]{} 1.$$

Par conséquent on a $\beta \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\beta \xrightarrow[p\to-\infty]{} \beta$ et $\beta \xrightarrow[p\to-\infty]{} \beta$ d'où par théorème des gendarmes,

$$\boxed{\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to-\infty]{} \beta}.$$

▷ **Seconde méthode**
Une méthode plus efficace est de remarquer

$$p = (-1)\times(-p)$$

d'où par conséquent pour tout $x>0$,

$$x^p = \left(\frac{1}{x}\right)^{-p}$$

et utiliser la question précédente.
Plus précisément on a pour tout $p\neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}\right)^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}}\\ &= \frac{1}{\mathrm{M}_{-p}\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, par la question **1.1.**, comme

$$-p \xrightarrow[p\to-\infty]{} +\infty,$$

et par continuité de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on a

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to-\infty]{} \frac{1}{\max\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right)}.$$

Or par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on a

$$\max\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\min(x_1,\dots,x_n)}$$

d'où finalement on obtient bien

$$\boxed{\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to-\infty]{} \min(x_1,\dots,x_n)}.$$

1.3. Montrer que

$$\lim_{p\to 0}\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque méthodologique:
On peut commencer au brouillon pour déterminer par calcul la limite et on retrouve alors une Forme Indéterminée de type «1^∞» (plus précisément «$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right)\times+\infty$»).
Une méthode est d'alors écrire «a^b» comme «$\exp(b\ln(a))$» c'est à dire à de ramener à une Forme Indéterminée de type «$\exp(0\times\infty)$».
Pour lever l'indétermination «$0\times\infty$», on verra plus tard dans l'année des méthodes de développement asymptotique, notamment les DLs. Pour l'instant on se contente de la méthode des taux d'accroissements vue en Terminale.
Pour $p\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)\right)\end{aligned}$$

et donc en posant pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$f(p) = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p\right)$$

on a pour tout $p \neq 0$,

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) = \exp\left(\frac{f(p)}{p}\right).$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée de somme de fonctions dérivables) et

$$f(0) = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right) = 0$$

on a

$$\frac{f(p)}{p} = \frac{f(p)-f(0)}{p-0} \xrightarrow[p\to 0]{} f'(0)$$

et par conséquent (continuité de exp)

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to 0]{} \exp\left(f'(0)\right).$$

Il ne reste plus qu'à calculer $f'(0)$.
Rappel: on rappelle que comme pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, $a^t = \exp(t\ln(a))$, on a

$$\frac{\mathrm{d}a^t}{\mathrm{d}t} = \ln(a)a^t.$$

Pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a (dérivée d'une somme et dérivée d'une composée),

$$f'(p) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k){x_k}^p}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}f'(0) &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1} \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to 0]{} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

On notera, dans la suite de la question **1.3.**,

$$\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque: cet prolongement de fonction s'agit d'un cas particulier de prolongement par continuité.

1.II. Monotonie des moyennes

1.4. Soit $p > 1$.
Montrer que

$$\mathrm{M}_1(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n).$$

Soit

$$\phi_p : \begin{array}{c}]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ x \mapsto x^p \end{array}.$$

Alors ϕ_p est deux fois dérivable (fonction usuelle) et comme $p > 1$

$$\forall x > 0,\ \phi_p{}''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

et donc est convexe.
Par **inégalité de convexité** (cf le DM 1 obligatoire), on a donc

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^p$$

et comme $\frac{1}{p} > 0$, $\begin{array}{c}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\frac{1}{p}} \end{array}$ est croissante, d'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathrm{M}_1(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)}.$$

1.5. En déduire que

$$\begin{array}{c}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ p \mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

est croissante sur $]0,+\infty[$.

Soient $p_1, p_2 > 0$ tels que $p_1 < p_2$.
Par l'inégalité de la question **1.4.** appliquée à $({x_1}^{p_1},\dots,{x_n}^{p_1}) \in]0,+\infty[^n$ et $\frac{p_2}{p_1} > 1$,
on a

$$\mathrm{M}_1\left({x_1}^{p_1},\dots,{x_n}^{p_1}\right) \leq \mathrm{M}_{\frac{p_2}{p_1}}\left({x_1}^{p_1},\dots,{x_n}^{p_1}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{p_1} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left({x_k}^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}}.$$

Comme $\frac{1}{p_1} > 0$, $\begin{array}{c}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\frac{1}{p_1}} \end{array}$ est croissante, d'où on obtient finalement

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

On a donc montré (définition d'une fonction croissante) que $\boxed{p \mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \text{ est croissante sur }]0,+\infty[}$.

1.6. Conclure que

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

On procède
- la croissance sur $]0,+\infty[$ a déjà été montrée à la question **1.5.**
- on montre ensuite la croissance sur $]-\infty,0[$,
- puis en utilisant la continuité en 0, montrer précautionneusement la croissance sur $\mathbb{R}$.

Pour la croissance sur $]-\infty,0[$, on peut refaire une preuve similaire à la question précédente, ou bien comme à la question **1.2.** constater que $p=(-1)\times(-p)$.
Soient $p_1,p_2<0$ tels que $p_1\leq p_2$.
Comme $-p_1,-p_2>0$ et $-p_2\leq -p_1$, par la question **1.5.**, appliquée à $({x_1}^{-1},\dots,x_n^{-1})\in]0,+\infty[^n$,

$$\mathrm{M}_{-p_2}\left({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\right)\leq \mathrm{M}_{-p_1}\left({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\right).$$

Comme tous les termes sont strictement positifs, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ on obtient donc

$$\left(\mathrm{M}_{-p_2}\left({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\right)\right)^{-1}\geq\left(\mathrm{M}_{-p_1}\left({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

C'est à dire

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^{-(-(p_2))}\right)^{\frac{1}{-(-p_2)}}\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^{-(-(p_1))}\right)^{\frac{1}{-(-p_1)}}$$

ou encore

$$\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)\geq\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n).$$

On a donc bien montré que $\boxed{p\mapsto \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)\text{ est croissante sur }]-\infty,0[}$.
Montrons maintenant la croissance sur $\mathbb{R}$.
Remarque: attention, la croissance sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ ne suffit par à montrer la croissance sur $\mathbb{R}$, regarder par exemple $x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.
Il faut donc faire usage de la continuité en 0.
D'ailleurs la preuve qui suit suffit pour montrer en toute généralité que si f est croissante sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et continue en 0 alors elle est croissante sur $]-\infty,+\infty[$.

- ▷ Soit $p>0$.
  On a pour tout $\varepsilon\in]0,p[$, par la question **1.5.**,

  $$\mathrm{M}_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n).$$

  Comme $p\mapsto\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)$ est continue en 0, car par définition même de $\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)$ on a $\mathrm{M}_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)$, lorsque $\varepsilon\to 0$ par Passage à la Limite des Inégalités Larges,

  $$\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n).$$

- ▷ De même pour $p<0$, on peut soit utiliser $\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)=\left(\mathrm{M}_{-p}({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1})\right)^{-1}$ et l'inégalité $\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)$, soit passer à la limite $\varepsilon\to 0^-$ l'inégalité $\forall\varepsilon\in]p,0[,\ \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)$ pour obtenir

  $$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n).$$

- ▷ Soient désormais $p_1,p_2\in\mathbb{R}$ tels que $p_1\leq p_2$.
  On procède par disjonction de cas (faire un schéma si nécessaire pour distinguer tous les cas):
  - ▶ Si $0=p_1=p_2$ on a $\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)$.
  - ▶ Si $0<p_1\leq p_2$, la croissance sur $]0,+\infty[$ assure que $\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)$.
  - ▶ Si $0=p_1<p_2$ alors on vient de voir que $\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)$.
  - ▶ Si $p_1\leq p_2<0$, la croissance sur $]-\infty,0[$ assure que $\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)$.
  - ▶ Si $p_1<p_2=0$ alors on vient de voir que $\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)$.
  - ▶ Si $p_1<0<p_2$, alors on a par les deux inégalités que l'on vient de démontrer

    $$\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)$$
    $$\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)$$

    et donc en particulier

    $$\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n).$$

  Dans tous les cas $\mathrm{M}_{p_1}(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_{p_2}(x_1,\dots,x_n)$ et donc

  $$\boxed{p\mapsto\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n)\text{ est croissante sur }\mathbb{R}}.$$

1.7. Commenter.

Plusieurs commentaires sont possibles.

- On remarque que l'on a en particulier obtenu une autre démonstration de l'IAG, car en particulier

  $$\mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n)\leq\mathrm{M}_1(x_1,\dots,x_n).$$

- On peut aussi remarquer que cette démonstration de l'IAG revient à passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ l'inégalité de concavité (car $\varepsilon(\varepsilon-1)<0$) de $x \mapsto x^\varepsilon$

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \mathrm{M}_\varepsilon(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_1(x_1,\dots,x_n)$$

  et ce n'est pas surprenant de retrouver à la limite quand $\varepsilon \to 0$ un ln (on verra au cours de l'année que la fonction ln se «comporte» parfois comme la fonction $x \mapsto x^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$).
- Une autre remarque est que l'on obtient une généralisation de l'IAG.
  On obtient par exemple l'IHGAQ (Inégalité Harmonique-Géométrique-Arithmétique-Quadratique)

$$\mathrm{M}_{-1}(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_0(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_1(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_2(x_1,\dots,x_n).$$

  Ainsi qu'un nombre quelconque (une pour chaque valeur de $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$) de telles inégalités.
- On peut aussi remarquer que la méthode de faire tendre $p \to 0$ et de Passer à la Limite les Inégalités Larges peut être adaptée en $\pm\infty$.
  Soit $p \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $\rho > p$ on a

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_\rho(x_1,\dots,x_n)$$

  et donc lorsque $\rho \to +\infty$, par la question **1.1.**

$$\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \leq \max(x_1,\dots,x_n).$$

  De même

$$\min(x_1,\dots,x_n) \leq \mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n).$$

  Un commentaire dans le commentaire est de remarquer que si cette méthode est parfois utile, ici elle ne l'est pas car dans la démonstration même par encadrement de la question **1.1.** on démontrait et utilisait $\mathrm{M}_p(x_1,\dots,x_n) \leq \max(x_1,\dots,x_n)$.
- Une autre remarque est que la preuve repose sur une inégalité de convexité (et des manipulations algébriques).
  Étant donnés

$$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in [0,1]^n \qquad \text{tel que} \qquad \sum_{k=1}^n \omega_k = 1$$

  on peut alors définir pour tout $p \neq 0$, la p-moyenne pondérée

$$\mathrm{M}_{p,\omega}(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{k=1}^n \omega_k (x_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Le cas que l'on vient de traiter correspondant au cas particulier $\omega = \left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$.
  Alors (c'est un bon exercice d'essayer de refaire les preuves pour voir les arguments qui changent et ceux qui restent les mêmes)
  ▷ Les limites en $\pm\infty$ restent les mêmes sont conditions que pour tout k, $\omega_k \neq 0$.
  ▷ Lorsque $p \to 0$, on a

$$\mathrm{M}_{p,\omega}(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow[p\to 0]{} \prod_{k=1}^n (x_k)^{\omega_k}$$

    qui est la moyenne géométrique pondérée.
  ▷ La croissance reste exactement la même d'où les inégalités qui en découlent.
- Le cas pondéré montre que l'on peut reformuler la moyenne en tant qu'espérance.
  Avec X une variable aléatoire strictement positive, on peut poser pour $p \neq 0$,

$$\mathrm{M}_p(X) = \mathbb{E}\left[X^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

  et alors on obtient par exemple

$$\mathbb{E}\left[X^p\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to 0]{} \exp\left(\mathbb{E}\left[\ln(X)\right]\right)$$

  et la croissance de $p \mapsto \mathbb{E}[X^p]^{\frac{1}{p}}$.
- Ce type d'étude s'étend en fait dès que l'on a des méthodes de "sommation", par exemple pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable on peut poser

$$\mathrm{M}_p(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

  ou encore pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{M}_p(f) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

et même pour tout fonction $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ positive telle que $\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x = 1$,

$$\mathrm{M}_{p,\omega}(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On obtient alors des inégalités similaire. Le calcul des limites est légèrement plus technique et dépend des propriétés de ω.