On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce DM propose d'énoncer et de démontrer certaines propriétés additionnelles sur les applications linéaires.
En particulier toute question ou partie avec le symbole «♣» **fait partie du cours**, et à ce titre peut être utilisé et doit être connu (ainsi que sa démonstration).

- La partie 1 étend certaines problématiques des applications au contexte des applications linéaire. Il s'agit des notions d'image directe, image réciproque, restriction, partie stable. Elle introduit aussi deux notions essentielles: la notion **d'endomorphisme induit** et de **définition d'une application linéaire via une somme directe**.
- La partie 2 précise l'étude des hyperplans. La première sous-section détaille le lien entre hyperplans et droites vectorielles. La seconde partie insiste sur la caractérisation via les hyperplans des libertés de formes linéaires. À ce titre la question **2.8.** est un exercice extrêmement classique (mais plus longue que les autres questions du devoir).
- La partie 3 (facultative) propose quelques vérifications introductives à la notion de dualité.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & & \\ E & \xrightarrow{\quad u \quad} & F \\ \Big\downarrow .^* & & \\ E^* & \xleftarrow[u^*]{} & F^* \\ \mathcal{L}(F^*,E^*) & & \end{array}$$

---

1. Cours: Applications linéaires comme applications

1.I. Image directe, image réciproque, restriction, corestriction

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1.1. ♣ **Image directe** Soit G un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle que l'image directe de G par u, notée $u(G)$ est définie par

$$\begin{aligned} u(G) &= \{u(x), x \in G\} \\ &= \{y \in F | \exists x \in G, y = u(x)\}. \end{aligned}$$

Montrer que $u(G)$ est un sev de F.

1.2. ♣ **Image réciproque** Soit H un sous-espace vectoriel de F.
On rappelle que l'image réciproque de H par u, notée $u^{-1}(H)$ est définie par

$$u^{-1}(H) = \{x \in E | u(x) \in H\}.$$

Montrer que $u^{-1}(H)$ est un sev de E.

1.3. ♣ **Restriction** Soit G un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle que la restriction de u à G, notée $u_{|G}$ est définie par

$$u_{|G} : \begin{cases} G \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

Montrer que $u_{|G} \in \mathcal{L}(G,F)$.

1.4. **Corestriction** Soit H un sous-espace vectoriel tel que $\mathrm{Im}(u) \subset H$.
On définit la corestriction de u à H, notée parfois $u^{|H}$, par

$$u^{|H} : \begin{cases} E \to H \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

Montrer que $u^{|H} \in \mathcal{L}(E,H)$.

1.II. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Étant donnés $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F **est stable par** u (ou que u stabilise F) ssi

$$\forall x \in F,\ u(x) \in F$$

c'est à dire

$$u(F) \subset F.$$

1.5. ♣ Soit u un endomorphisme de E.
Montrer que l'intersection de deux sous-espaces stables par u est stable par u.

1.6. ♣ Soit u un endomorphisme de E.
Montrer que la somme de deux sous-espaces stables par u est stable par u.

1.7. ♣ Soient u et v deux endomorphismes **qui commutent** (c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$).
Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

1.8. ♣ Soit u et v deux endomorphismes **qui commutent**.
Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

1.9. Soit F un sev de E. Montrer que l'ensemble des endomorphismes stabilisant F est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Étant donnés un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sev F de E tels que F **est stable par** u, on définit l'**endormorphisme induit par** u **sur** F, noté u_F par

$$u_F : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

1.10. ♣ Commenter la bonne définition d'un endomorphisme induit.

1.III. Construction via des supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient E_1 et E_2 deux sevs de E supplémentaires (c'est à dire tels que $\underline{E_1 \oplus E_2 = E}$).

1.11. ♣ Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u_{|E_1} = v_{|E_1}$ et $u_{|E_2} = v_{|E_2}$. Montrer que $u = v$.

1.12. ♣ Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

1.13. ♣ Que dire de l'application

$$\mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$$
$$u \mapsto \left(u_{|E_1}, u_{|E_2}\right)$$

2. Cours: Encore des hyperplans

Soit E un espace vectoriel.
On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2.I. Hyperplans et droites

2.1. ♣ Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:
(i) il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$.
(ii) il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Dans ce cas on rappelle que l'on dit que H est un **hyperplan**.

2.2. ♣ Soit H un hyperplan de E.
Montrer que pour tout $u \notin H$, en posant $D = \mathrm{Vect}(u)$ la droite vectorielle engendrée par u,

$$H \oplus D = E.$$

2.3. ♣ Soit H un hyperplan de E.
Montrer que pour tout D supplémentaire de H (c'est à dire sev de E tel que $H \oplus D = E$) il existe $u \notin H$ tel que

$$D = \mathrm{Vect}(u).$$

2.II. Hyperplans comme sevs stricts maximaux

2.4. ♣ Soit H un hyperplan.
Soit F un sev de E tel que $H \subset F$.
Montrer que $F = H$ ou $F = E$

2.5. Soit F un sev de E tel que $F \neq E$.
Montrer qu'il existe un hyperplan H tel que $F \subset H$.

Indication: on pourra admettre que tout sev admet un supplémentaire.

2.III. Hyperplans et relations de liaison

2.6. ♣ Soient φ_1 , φ_2 deux formes linéaires non nulles et H_1, H_2 les deux hyperplans associés (c'est à dire $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$).
Montrer que

$$H_1 = H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ colinéaires.}$$

2.7. Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires sur E. Soit ψ une forme linéaire sur E.
Montrer que

$$\psi \in \mathrm{Vect}((\varphi_i)_{i\in I}) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi).$$

2.8. ♠ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E et ψ une forme linéaire sur E.
Montrer que

$$\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\psi).$$

Il y a de nombreuses façons de procéder, par exemple par récurrence sur n.

2.9. Pour $E = \mathbb{K}[X]$ donner un exemple de formes linéaires $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ψ telles que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_n) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \text{ et } \psi \notin \mathrm{Vect}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

3. Bonus: premiers calculs de dualité

On rappelle qu'étant donné un espace vectoriel E on note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

3.I. Bidual

3.1. ♠ Soit E un espace vectoriel.
On définit l'application

$$\iota : \begin{array}{c} E \to (E^*)^* \\ x \mapsto \begin{pmatrix} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Montrer que ι est une application linéaire injective.

3.2. Pour $E = \mathbb{K}[X]$ montrer que ι n'est pas surjective.

3.II. Adjonction

Soient E et F deux espaces vectoriels.

3.3. ♠ Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit une application u^* par

$$u^* : \begin{array}{c} F^* \to E^* \\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \varphi(u(x)) \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que $u^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.

3.4. ♠ Montrer que l'application

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ u \mapsto u^* \end{array}$$

est linéaire et injective.
Commenter.

3.5. Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Ce n'est que le tout début de la magnifique histoire de la dualité.