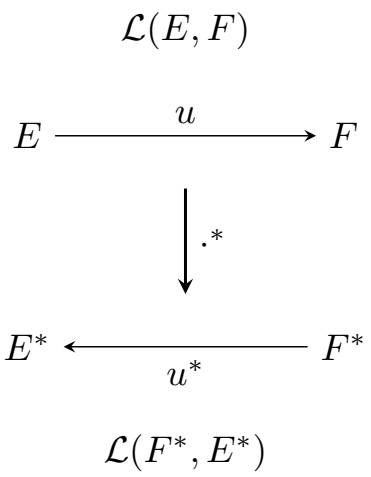
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce DM propose d'énoncer et de démontrer certaines propriétés additionnelles sur les applications linéaires.
En particulier toute question ou partie avec le symbole «♣» **fait partie du cours**, et à ce titre peut être utilisé et doit être connu (ainsi que sa démonstration).

- La partie 1 étend certaines problématiques des applications au contexte des applications linéaire. Il s'agit des notions d'image directe, image réciproque, restriction, partie stable. Elle introduit aussi deux notions essentielles: la notion **d'endomorphisme induit** et de **définition d'une application linéaire via une somme directe**.
- La partie 2 précise l'étude des hyperplans. La première sous-section détaille le lien entre hyperplans et droites vectorielles. La seconde partie insiste sur la caractérisation via les hyperplans des libertés de formes linéaires. À ce titre la question **2.8.** est un exercice extrêmement classique (mais plus longue que les autres questions du devoir).
- La partie 3 (facultative) propose quelques vérifications introductives à la notion de dualité.



---

1. Cours: Applications linéaires comme applications

1.I. Image directe, image réciproque, restriction, corestriction

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1.1. ♣ Image directe Soit G un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle que l'image directe de G par u, notée $u(G)$ est définie par

$$\begin{aligned} u(G) &= \{u(x), x \in G\} \\ &= \{y \in F | \exists x \in G, y = u(x)\}. \end{aligned}$$

Montrer que $u(G)$ est un sev de F.

On a $u(G) \subset F$.
On a aussi $u(0_E) = 0_F$ et $0_E \in G$, donc $0_F \in u(G)$
Montrons la stabilité par combinaison linéaire.
Soient $(y_1, y_2) \in u(G)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Par définition de $u(G)$ il existe $x_1 \in G$ tel que $y_1 = u(x_1)$ et de même il existe $x_2 \in G$ tel que $y_2 = u(x_2)$.
Alors par linéarité de u, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$. De plus comme G est un sev $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in G$.
D'où $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in u(G)$.
Donc $\boxed{u(G) \text{ est un sev de } F}$.

1.2. ♣ Image réciproque Soit H un sous-espace vectoriel de F.
On rappelle que l'image réciproque de H par u, notée $u^{-1}(H)$ est définie par

$$u^{-1}(H) = \{x \in E | u(x) \in H\}.$$

Montrer que $u^{-1}(H)$ est un sev de E.

On a $u^{-1}(H) \subset E$.
De plus $u(0_E) = 0_F$ et $0_F \in H$ donc $0_E \in u^{-1}(H)$.
Montrons la stabilité par combinaison linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in u^{-1}(H)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Par définition de $u^{-1}(H)$ on a $u(x_1) \in H$ et $u(x_2) \in H$.
Et par linéarité de u, $u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)$. Et comme H est un sev, $\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \in H$.
D'où $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in u^{-1}(H)$.
Donc $\boxed{u^{-1}(H) \text{ est un sev de } E}$.

1.3. ♣ **Restriction** Soit G un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle que la restriction de u à G, notée $u_{|G}$ est définie par

$$u_{|G}: \begin{cases} G \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

Montrer que $u_{|G} \in \mathcal{L}(G, F)$.

L'application $u_{|G}$ est bien une application de G vers F.
Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in G^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Par définition de $u_{|G}$ et par linéarité de u,

$$\begin{aligned} u_{|G}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \\ &= \lambda_1 u_{|G}(x_1) + \lambda_2 u_{|G}(x_2). \end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{u_{|G} \in \mathcal{L}(G, F)}$.

1.4. **Corestriction** Soit H un sous-espace vectoriel tel que $\mathrm{Im}(u) \subset H$.
On définit la corestriction de u à H, notée parfois $u^{|H}$, par

$$u^{|H}: \begin{cases} E \to H \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

Montrer que $u^{|H} \in \mathcal{L}(E, H)$.

Comme $\mathrm{Im}(u) \subset H$ l'application $u^{|H}$ est bien définie, et une application de E vers H.
Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Par définition de $u^{|H}$ et par linéarité de u,

$$\begin{aligned} u^{|H}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \\ &= \lambda_1 u^{|H}(x_1) + \lambda_2 u^{|H}(x_2). \end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{u^{|H} \in \mathcal{L}(E, H)}$.

1.II. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Étant donnés $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F **est stable par** u (ou que u stabilise F) ssi

$$\forall x \in F,\ u(x) \in F$$

c'est à dire

$$u(F) \subset F.$$

1.5. ♣ Soit u un endomorphisme de E.
Montrer que l'intersection de deux sous-espaces stables par u est stable par u.

Soient F_1 et F_2 deux sevs stables par u.
Tout d'abord $F_1 \cap F_2$ est bien un sev de E
Montrons qu'il est stable par u.
Soit $x \in F_1 \cap F_2$.
- Comme $x \in F_1$ et F_1 stable par u, on a $u(x) \in F_1$.
- Comme $x \in F_2$ et F_2 stable par u, on a $u(x) \in F_2$.

Et donc $u(x) \in F_1 \cap F_2$.
Par conséquent on a bien $F_1 \cap F_2$ stable par u.
$\boxed{\text{L'intersection de deux sevs stables par } u \text{ est un sev stable par } u}$.

1.6. ♣ Soit u un endomorphisme de E.

Montrer que la somme de deux sous-espaces stables par u est stable par u.

Soient F_1 et F_2 deux sevs stables par u.
Tout d'abord $F_1 + F_2$ est bien un sev de E.
Montrons qu'il est stable par u.
Soit $x \in F_1 + F_2$.
Il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que

$$x = x_1 + x_2$$

(fixons-les). Par linéarité de u,

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2).$$

Comme $x_1 \in F_1$ et F_1 stable par u, $u(x_1) \in F_1$. De même comme $x_2 \in F_2$ et F_2 stable par u, $u(x_2) \in F_2$.
Et donc $u(x) \in F_1 + F_2$.
Par conséquent on a bien $F_1 + F_2$ stable par u.
La somme de deux sevs stables par u est un sev stable par u.

1.7. ♣ Soient u et v deux endomorphismes **qui commutent** (c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$).
Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Ce sont bien des sevs de E.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
  On a comme $u \circ v = v \circ u$,
  $$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$$
  et donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
  Donc $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$.
  Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ (fixons-le).
  On a comme $v \circ u = u \circ v$,
  $$v(y) = v(u(x)) = u(v(x))$$
  et donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$.
  Donc $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

1.8. ♣ Soit u et v deux endomorphismes **qui commutent**.
Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a comme u et v commutent, et par linéarité de la composition des endomorphismes

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v = u \circ v - \lambda v = v \circ u - \lambda v = v \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

et par conséquent $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ et v commutent. (De manière générale tout polynôme en u commutent avec v).
Par la question précédente on en déduit que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

1.9. Soit F un sev de E. Montrer que l'ensemble des endomorphismes stabilisant F est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

- On a pour tout $x \in F$, $0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E \in F$ et donc $0_{\mathcal{L}(E)}$ stabilise F.
- Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes stabilisant F et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
  Soit $x \in F$.
  On a alors $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x)$.
  Comme $u_1(x) \in F$ et $u_2(x) \in F$ et que F est un sev, on a alors $\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) \in F$.
  Donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ stabilise F.

L'ensemble des endomorphismes stabilisant F est bien un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Étant donnés un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sev F de E tels que F **est stable par** u, on définit l'**endormorphisme induit par** u **sur** F, noté u_F par

$$u_F : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

1.10. ♣ Commenter la bonne définition d'un endomorphisme induit.

Comme u stabilise F on a pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ et donc $\boxed{u_F \text{ est bien défini}}$.
Il faut faire attention à ne pas confondre $u_F : F \to F$ qui nécessite la stabilité de F par u pour être défini et $u_{|F} : F \to E$ qui est toujours défini.

1.III. Construction via des supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient E_1 et E_2 deux sevs de E supplémentaires (c'est à dire tels que $E_1 \oplus E_2 = E$).

1.11. ♣ Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u_{|E_1} = v_{|E_1}$ et $u_{|E_2} = v_{|E_2}$. Montrer que $u = v$.

Tout d'abord on a bien u et v ont même ensemble de départ (E) et d'arrivée (E).
Soit $x \in E$.
Comme $E_1 + E_2 = E$ il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Par linéarité de u et de v, et égalité des applications restreintes,

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 + x_2) \\ &= u(x_1) + u(x_2) \\ &= u_{|E_1}(x_1) + u_{|E_2}(x_2) \\ &= v_{|E_1}(x_1) + v_{|E_2}(x_2) \\ &= v(x_1) + v(x_2) \\ &= v(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{u = v}$.

1.12. ♣ Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Première rédaction
Soit $x \in E$.
Comme $E_1 \oplus E_2$ il existe un et unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$$

Posons

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2).$$

- L'application $u : E \to F$ est alors bien définie par existence et unicité d'une telle décomposition.
- Montrons que u est linéaire.
  Soient $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
  Avec $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ et $y = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$ on a alors (comme E_1 et E_2 des sevs)

$$\lambda x + \mu y = \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2}.$$

  Et donc, par linéarité de u_1 et u_2

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (\lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1)) + (\lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2)) \\ &= \lambda\left(u_1(x_1) + u_2(x_2)\right) + \mu\left(u_1(y_1) + u_2(y_2)\right) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u \in \mathcal{L}(E, F)}$.

- De plus $u_{|E_1}$ et u_1 ont les mêmes espaces de départ et d'arrivée, et pour tout $x_1 \in E_1$, comme on a la décomposition

$$x_1 = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2}$$

  on a $u(x_1) = u_1(x_1)$.
  D'où $\boxed{u_{|E_1} = u_1}$.
- Et de même $\boxed{u_{|E_2} = u_2}$.

Seconde rédaction
Notons π_1 (resp. π_2) la projection sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1).
Posons

$$u = u_1 \circ \pi_1^{|E_1} + u_2 \circ \pi_2^{|E_2}$$

- u est bien définie car comme $\pi_1 : E \to E$ vérifie $\mathrm{Im}(\pi_1) = E_1$, $\pi_1^{|E_1}$ est bien définie et $\pi_1^{|E_1} : E \to E_1$. D'où $u_1 \circ \pi_1^{|E_1} : E \to F$ est bien définie. (De même pour $u_2 \circ \pi_2^{|E_2}$).
- u est linéaire comme somme de composée d'applications linéaires. D'où $\boxed{u \in \mathcal{L}(E,F)}$
- On a (caractère linéaire de la restriction)

$$u_{|E_1} = u_1 \circ \pi_1{}_{|E_1}^{|E_1} + u_2 \circ \pi_2{}_{|E_1}^{|E_2}$$

et $\pi_1{}_{|E_1}^{|E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ tandis que $\pi_2{}_{|E_1}^{|E_2} = 0_{E_1 \to E_2}$ d'où

$$\boxed{u_{|E_1} = u_1}$$

- De même $\boxed{u_{|E_2} = u_2}$.

1.13. ♣ Que dire de l'application

$$\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E_1,F) \times \mathcal{L}(E_2,F)$$
$$u \mapsto \left(u_{|E_1}, u_{|E_2}\right)$$

- Par la question précédente cette application est injective et surjective.
- De plus soient $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
  On a par définition de la combinaison linéaire d'applications linéaires et par définition de la restriction (l'écrire si nécessaire), $(\lambda u + \mu v)_{|E_1} = \lambda u_{|E_1} + \mu v_{|E_1}$, et de même pour E_2.

Donc cette application $\boxed{\text{est un isomorphisme}}$ (de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels).

2. Cours: Encore des hyperplans

Soit E un espace vectoriel.
On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

2.I. Hyperplans et droites

2.1. ♣ Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:
(i) il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$.
(ii) il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Dans ce cas on rappelle que l'on dit que H est un **hyperplan**.

► $(i) \Rightarrow (ii)$
Soit D une droite vectorielle supplémentaire à H.
Soit $\xi \in E$, $\xi \neq 0_E$ tel que $D = \mathrm{Vect}(\xi)$.
Considérons les applications

$$\varphi_H : \begin{cases} H \to \mathbb{K} \\ x \mapsto 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi_D : \begin{cases} D \to \mathbb{K} \\ \lambda\xi \mapsto \lambda \end{cases}$$

la seconde application linéaire étant bien définie, car (ξ) est une base de $\mathrm{Vect}(\xi)$ et donc λ existe et est unique, et est linéaire. (Il s'agit de la bonne définition et de la linéarité de l'application coordonnées).
Alors comme $H \oplus D = E$, il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ tel que $\varphi_{|H} = \varphi_H$ et $\varphi_{|D} = \varphi_D$.
Alors φ est une forme linéaire, non nulle (car $\varphi(\xi) = 1 \neq 0$).
Montrons que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $x \in E$. Avec la décomposition (qui existe et est unique) selon la somme directe

$$x = \underbrace{h}_{\in H} + \underbrace{\lambda\xi}_{\in D}$$

on a

$$\varphi(x) = 0 + \lambda$$

et donc (la dernière équivalence étant par existence et unicité)

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Donc on a bien $\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$.

► $\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$
Soit $\varphi \in E^* \backslash \{0_{E^*}\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Comme $\varphi \neq 0_{E^*}$, il existe $\xi \in E$ tel que $\varphi(\xi) \neq 0_{\mathbb{K}}$.
Posons $D = \mathbb{K}\xi$. Alors $\underline{D \text{ est une droite vectorielle}}$.
Montrons que $H \oplus D = E$.

- **La somme est directe**
  Soit $x \in H \cap D$.
  Alors, comme $x \in D$ il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que $x = t\xi$.
  Comme $x \in H$ on a $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$.
  Or $\varphi(x) = t\varphi(\xi)$ et $\varphi(\xi) \neq 0_{\mathbb{K}}$, donc $t = 0_{\mathbb{K}}$.
  Donc $x = 0_E$.
  Donc $\boxed{H \cap D = \{0_E\}}$.
- **La somme est E**
  Soit $x \in E$.
  Posons $t = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)}$ et $h = x - t\xi$.
  Alors:
  ▷ $x = h + t\xi$,
  ▷ $t\xi \in D$,
  ▷ on a

$$\varphi(h) = \varphi(x) - t\varphi(\xi) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)}\varphi(\xi) = 0_{\mathbb{K}}$$

  et donc $h \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.
  Par conséquent $\boxed{H + D = E}$.

Et donc $\boxed{H \oplus D = E}$.

2.2. ♣ Soit H un hyperplan de E.
Montrer que pour tout $u \notin H$, en posant $D = \mathrm{Vect}(u)$ la droite vectorielle engendrée par u,

$$H \oplus D = E.$$

Soit $\varphi \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. En particulier comme $u \notin H$, $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$.
Afin de varier, proposons une rédaction par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Soit $x \in E$.
  Supposons qu'il existe $h \in H$ et $t \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = h + tu.$$

  En appliquant φ on obtient

$$\varphi(x) = 0 + t\varphi(u)$$

  et donc ($\varphi(u)$ est un scalaire non nul),

$$t = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}.$$

  Et ensuite

$$h = x - tu = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u.$$

  D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.
- **Synthèse**
  Soit $x \in E$.
  Posons

$$t = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$$

  et

$$h = x - tu.$$

  Alors:
  ▷ $x = h + tu$,
  ▷ $tu \in D$,
  ▷ on a

$$\varphi(h) = \varphi(x) - t\varphi(u) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}\varphi(u) = 0$$

d'où $h \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.
D'où $\boxed{\text{l'existence}}$.
Par existence et unicité on a donc

$$\boxed{H \oplus D = E}.$$

2.3. ♣ Soit H un hyperplan de E.
Montrer que pour tout D supplémentaire de H (c'est à dire sev de E tel que $H \oplus D = E$) il existe $u \notin H$ tel que

$$D = \mathrm{Vect}(u).$$

Comme D est une droite vectorielle, il existe $u \in D$ tel que $u \neq 0_E$.
En particulier $u \notin H$ (car $H \cap D = \{0_E\}$) et $D = \mathrm{Vect}(u)$ (car D est une droite vectorielle et u non nul).
Donc $\boxed{\text{pour tout } D \text{ supplémentaire de } H \text{ il existe } u \notin H \text{ tel que } D = \mathrm{Vect}(u)}$.

2.II. Hyperplans comme sevs stricts maximaux

2.4. ♣ Soit H un hyperplan.
Soit F un sev de E tel que $H \subset F$.
Montrer que $F = H$ ou $F = E$

Supposons que $F \neq H$.
Il existe alors $\xi \in E$ tel que $\xi \in F$ et $\xi \notin H$.
Alors, comme F est un sev, $H + \mathbb{K}\xi \subset F$ i.e, par les questions précédentes, $E \subset F$ et donc $F = E$.

2.5. Soit F un sev de E tel que $F \neq E$.
Montrer qu'il existe un hyperplan H tel que $F \subset H$.
Indication: on pourra admettre que tout sev admet un supplémentaire.

Comme $F \neq E$ il existe $\xi \in E$ tel que $\xi \notin F$.
Alors $F \cap \mathbb{K}\xi = \{0_E\}$ (car pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ si $\lambda\xi \in F$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda^{-1}\lambda\xi = \xi \in F$ ce qui est absurde).
Ainsi $F \oplus \mathbb{K}\xi = F + \mathbb{K}\xi$.
Ainsi F est un hyperplan de $F \oplus \mathbb{K}\xi$.
Il existe donc $\psi \in (F \oplus \mathbb{K}\xi)^* \backslash \{0_{(F\oplus\mathbb{K}\xi)^*}\}$ telle que $F = \mathrm{Ker}(\psi)$.
Soit S un supplémentaire de $F \oplus \mathbb{K}\xi$ dans E.
Considérons les applications

$$\psi : F \oplus \mathbb{K}\xi \to \mathbb{K}$$

et la forme linéaire nulle

$$0_{S\to\mathbb{K}} : S \to \mathbb{K}.$$

Comme $(F \oplus \mathbb{K}\xi) \oplus S = E$ il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi_{|F\oplus\mathbb{K}\xi} = \psi$ et $\varphi_{|S} = 0_{S\to\mathbb{K}}$.
En particulier on a:
- $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, car pour tout $x \in F$ on a $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.
- $\varphi \neq 0_{E^*}$, car par exemple $\varphi(\xi) = \psi(\xi) \neq 0$.

et donc on a bien $\boxed{F \text{ est contenu dans un hyperplan}}$.

2.III. Hyperplans et relations de liaison

2.6. ♣ Soient φ_1 , φ_2 deux formes linéaires non nulles et H_1, H_2 les deux hyperplans associés (c'est à dire $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$).
Montrer que

$$H_1 = H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ colinéaires.}$$

On procède par double implication.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons φ_1 et φ_2 colinéaires.
  ▷ Comme φ_1 non nulle il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$.
  Et donc pour tout $x \in H_1$, $\varphi_2(x) = \lambda\varphi_1(x) = \lambda 0 = 0$ d'où $x \in H_2$.
  Et donc $H_1 \subset H_2$.

▷ Comme φ_2 non nulle il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.
et donc de même $H_2 \subset H_1$.
Et donc $\boxed{H_1 = H_2}$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $H_1 = H_2$. Soit $\xi \notin H_1$ et $D = \text{Vect}(\xi)$. On a alors $H_1 \oplus D = E$.
Alors $\varphi_1(\xi) \neq 0$. Posons $\lambda = \frac{\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)}$ et $\psi = \lambda\varphi_1$.
Alors
▷ ψ et φ_2 deux formes linéaires sur E,
▷ comme $H_1 = H_2$,
$$\psi_{|H_1} = \lambda(\varphi_1)_{|H_1} = 0_{\mathcal{L}(H_1,\mathbb{K})} = (\varphi_2)_{|H_1}$$
▷ soit $x \in D$. Par définition de D il existe un (unique) scalaire $t \in \mathbb{K}$ tel que $x = t\xi$ et donc
$$\psi(x) = \psi(t\xi) = \lambda\varphi_1(t\xi) = \lambda t\varphi_1(\xi) = \frac{\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)}t\varphi_1(\xi) = t\varphi_2(\xi) = \varphi_2(t\xi) = \varphi_2(x)$$
et donc
$$\psi_{|D} = (\varphi_2)_{|D}.$$
Deux formes linéaires coïncidant sur deux supplémentaires étant égales on en déduit $\psi = \varphi_2$ et donc en particulier $\boxed{\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ colinéaires}}$.

2.7. Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires sur E. Soit ψ une forme linéaire sur E.
Montrer que
$$\psi \in \text{Vect}((\varphi_i)_{i\in I}) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i\in I} \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\psi).$$

Supposons $\psi \in \text{Vect}((\varphi_i)_{i\in I})$.
Alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tous nuls sauf un nombre fini tel que
$$\psi = \sum_{i\in I} \lambda_i\varphi_i.$$
Soit $x \in \bigcap_{i\in I} \text{Ker}(\varphi_i)$, c'est à dire tel qe $\forall i \in I, \varphi_i(x) = 0$.
Alors
$$\psi(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i\varphi_i(x) = \sum_{i\in I} 0 = 0$$
et donc $x \in \text{Ker}(\psi)$.
D'où on a bien
$$\boxed{\bigcap_{i\in I} \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\psi)}$$

2.8. ♠ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E et ψ une forme linéaire sur E.
Montrer que
$$\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi).$$
Il y a de nombreuses façons de procéder, par exemple par récurrence sur n.

On procède par double implication.
Le sens $\boxed{\Rightarrow}$ est un cas particulier de la question précédente.
Il reste donc à montrer le sens $\boxed{\Leftarrow}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{H}_n$, la proposition
$$\mathcal{H}_n : \quad \forall(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})^n, \forall\psi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi) \Rightarrow \psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
et on procède par récurrence.

- **Initialisation**: pour $n = 0$ la proposition $\mathcal{H}_0$ est $\forall\psi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, $E \subset \text{Ker}(\psi) \Rightarrow \psi = 0_{E\to\mathbb{K}}$ qui est bien vraie : si $E \subset \text{Ker}(\psi)$ alors ψ s'annule sur E tout entier, donc $\psi = 0_{E\to\mathbb{K}}$.
On aurait aussi pu commencer la récurrence à $n = 1$ et remarquer que le cas $n = 1$ correspond à la question **2.6.**
- **Hérédité**: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_n$.
Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})$ des formes linéaires et ψ une forme linéaire telle que $\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi)$.
On procède par disjonction de cas.

▷ **Si** $\varphi_{n+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ **alors**

$$\text{Ker}(\varphi_{n+1}) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k)$$

d'où

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k).$$

On a donc

$$\bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi)$$

et par hypothèse de récurrence, $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et donc

$$\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$$

▷ **Si** $\varphi_{n+1} \notin \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ **alors** par contraposée de l'hypothèse de récurrence

$$\text{Ker}(\varphi_{n+1}) \not\supset \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k).$$

Il existe donc $\xi \in \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k)$ tel que $\xi \notin \text{Ker}(\varphi_{n+1})$ (c'est à dire $\varphi_{n+1}(\xi) \neq 0$).
On a alors

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \oplus \text{Vect}(\xi) = \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k)$$

car $\text{Ker}(\varphi_{n+1}) \cap \text{Vect}(\xi) = \{0_E\}$ et pour tout $x \in \bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k)$, $x = \left(x - \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\xi\right) + \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\xi$.
Posons $\lambda = \frac{\psi(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}$ et

$$\Phi = \psi - \lambda\varphi_{n+1}.$$

Alors

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\Phi)$$

et

$$\text{Vect}(\xi) \subset \text{Ker}(\Phi)$$

d'où

$$\bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\Phi)$$

et par hypothèse de récurrence

$$\Phi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

d'où

$$\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}).$$

Dans tous les cas,

$$\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}).$$

- **Conclusion**: la propriété est donc initialisée et héréditaire, on a donc par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n, \forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}),\ \bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi) \Rightarrow \psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}.$$

Remarque: il y a de nombreuses autres façons de prouver cette propriété. On peut par exemple contourner la disjonction de cas en se ramenant à la propriété dans le cas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre. Ou encore remplacer la récurrence par des arguments de dimension finie, par exemple en considérant l'application

$$\Upsilon : \begin{array}{c} E \mapsto \mathbb{K}^{n+1} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

et en remarquant que la condition d'inclusion des noyaux signifie que $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(\Upsilon)$ *qui est donc un sev strict de* $\mathbb{K}^{n+1}$.

Il existe donc un hyperplan H *de* $\mathbb{K}^{n+1}$ *tel que* $\mathrm{Im}(\Upsilon) \subset H$, *la représentation des formes linéaires de* $\mathbb{K}^{n+1}$ *permettant alors de conclure (cf TD dédié).*

2.9. Pour $E = \mathbb{K}[X]$ donner un exemple de formes linéaires $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ψ telles que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_n) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \text{ et } \psi \notin \mathrm{Vect}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Prenons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n l'application coordonnée selon X^n dans la base canonique, c'est à dire l'application qui à $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ (compris comme somme presque nulle) associe a_n.
Or $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ ssi le coefficient en X^n dans P est nul, et donc (un polynôme étant nul ssi tous ses coefficients sont nuls)

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(P) = 0 \quad \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}\right)$$

c'est à dire

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

Pour toute forme linéaire ψ, on a donc l'inclusion

$$\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_n) \subset \mathrm{Ker}(\psi)}.$$

Il reste donc à déterminer une forme linéaire qui n'est pas combinaison linéaire (finie) des φ_n, c'est à dire n'étant pas dépendante que d'un nombre fini de coefficients.
Plus précisément si $\psi \in \mathrm{Vect}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ alors il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ tels que

$$\psi = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \varphi_k$$

et donc

$$\forall k > d, \psi(X^k) = 0.$$

Avec $\psi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ (ou beaucoup d'autres formes linéaires)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \psi(X^k) \neq 0$$

et donc

$$\boxed{\psi \notin \mathrm{Vect}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})}.$$

3. Bonus: premiers calculs de dualité

On rappelle qu'étant donné un espace vectoriel E on note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

3.I. Bidual

3.1. ♠ Soit E un espace vectoriel.
On définit l'application

$$\iota : \begin{array}{c} E \to (E^*)^* \\ x \mapsto \begin{pmatrix} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Montrer que ι est une application linéaire injective.

- **Bonne définition**
  Soit $x \in E$.
  Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Par linéarité de l'évaluation,

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)$$

c'est à dire

$$\iota(x)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\iota(x)(\varphi_1) + \lambda_2\iota(x)(\varphi_2)$$

et donc $\iota(x) \in \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K}) = (E^*)^*$.
Donc $\boxed{\iota : E \to (E^*)^* \text{ est bien définie}}$.

- **Linéarité**
Soient $x_1, x_2 \in E$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
On a pour tout $\varphi \in E^*$, par linéarité de φ,

$$\begin{aligned}\iota(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\varphi) &= \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\\ &= \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)\\ &= \lambda_1\iota(x_1)(\varphi) + \lambda_2\iota(x_2)(\varphi)\\ &= (\lambda_1\iota(x_1) + \lambda_2\iota(x_2))(\varphi)\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall\varphi \in E^*, \iota(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\varphi) = (\lambda_1\iota(x_1) + \lambda_2\iota(x_2))(\varphi)$$

c'est à dire

$$\iota(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\iota(x_1) + \lambda_2\iota(x_2).$$

Donc $\boxed{\iota \text{ est linéaire}}$.

- **Injectivité**
Soit $x \neq 0_E$.
Alors $D = \mathbb{K}x$ est une droite vectorielle.
Soit H un supplémentaire de D dans E.
Remarque: on utilise ici l'existence de supplémentaires, qui en dimension infinie découle a priori du lemme de Zorn, cf remarque culturelle en cours.
Alors H est un hyperplan. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Alors $\varphi(x) \neq 0$ et donc $\iota(x)(\varphi) \neq 0$.
D'où $x \notin \mathrm{Ker}(\iota)$.
Par conséquent $\boxed{\mathrm{Ker}(\iota) = \{0_E\}}$ et donc $\boxed{\iota \text{ est injective}}$.

3.2. Pour $E = \mathbb{K}[X]$ montrer que ι n'est pas surjective.

- **Intuition**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = d$ pour tout $\varphi \in E^*$, $\iota(x)(\varphi)$ ne dépend que de $\left(\varphi(X^k)\right)_{0\leq k\leq d}$.
Il suffit donc de construire une forme linéaire sur les formes linéaires ne dépendant pas que d'un nombre fini de valeurs.
- **Construction**
Posons, par exemple,

$$F = \left\{\varphi \in E^* \mid \left(\varphi(X^k)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\right\}.$$

Alors F est un sev de E^* (car la convergence est stable par combinaison linéaire).
Posons de plus

$$\begin{aligned}\gamma :\ & F \to \mathbb{K}\\ & \varphi \mapsto \lim_{k\to+\infty} \varphi(X^k)\end{aligned}$$

alors γ est bien définie (définition de F) et linéaire (linéarité de la limite).
Soit S un supplémentaire de F dans E^*.
Remarque: une fois de plus on utilise l'existence de supplémentaires.
Définissons $\Gamma : E^* \to \mathbb{K}$ l'application linéaire telle que $\Gamma_{|F} = \gamma$ et $\Gamma_{|S} = 0$.
Alors on a bien

$$\Gamma \in (E^*)^*.$$

- **Vérification**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq d$.
Considérons $\varphi_d \in E^*$ définie par $\varphi_d(X^k) = 0$ pour tout $k \leq d$ et $\varphi_d(X^k) = 1$ pour tout $k \geq d+1$ (définition d'une forme linéaire par l'image d'une base).

Alors $\varphi_d(P) = 0$ et $\Gamma(\varphi_d) = 1$ (limite d'une suite stationnaire).
D'où $\Gamma \neq \iota(P)$.
On a donc montré que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\Gamma \neq \iota(P)$.
Par conséquent $\Gamma \notin \mathrm{Im}(\iota)$.
Et donc $\boxed{\iota \text{ n'est pas surjective}}$.

Remarque culturelle importante: dans certains espaces, par exemple en dimension finie on a $(E^*)^* = E$ (c'est à dire que l'application ι est un isomorphisme), ce qui a de très nombreuses conséquences (méditer par exemple le lien avec le DM sur la structure des groupes abéliens finis).

3.II. Adjonction

Soient E et F deux espaces vectoriels.

3.3. ♠ Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit une application u^* par

$$u^* : \begin{array}{c} F^* \to E^* \\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \varphi(u(x)) \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que $u^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.

On peut de même que précédemment vérifier "à la main" la bonne définition, et le caractère linéaire.
Ou alors on constate que

$$u^* : \begin{array}{c} F^* \to E^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{array}$$

et donc est $\boxed{\text{est bien définie}}$ et $\boxed{\text{linéaire}}$, par linéarité de la composition entre applications linéaires.

3.4. ♠ Montrer que l'application

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ u \mapsto u^* \end{array}$$

est linéaire et injective.

- **Linéarité**
  Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
  On a pour tout $\varphi \in F^*$, par linéarité de la composition

$$\begin{aligned} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^* (\varphi) &= \varphi \circ (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \\ &= \lambda_1 \varphi \circ u_1 + \lambda_2 \varphi \circ u_2 \\ &= \lambda_1 u_1^*(\varphi) + \lambda_2 u_2^*(\varphi) \\ &= (\lambda_1 u_1^* + \lambda_2 u_2^*)(\varphi) \end{aligned}$$

  c'est à dire

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^* = \lambda_1 u_1^* + \lambda_2 u_2^*$$

  D'où l'application est $\boxed{\text{linéaire}}$.
- **Injectivité**
  Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u^* = 0_{F^* \to E^*}$.
  Soit $x \in E$.
  Alors pour tout $\varphi \in F^*$,

$$0 = u^*(\varphi)(x) = \varphi(u(x))$$

  d'où

$$\forall \varphi \in F^*, \varphi(u(x)) = 0.$$

  Donc $u(x) = 0_F$. (Par exemple car $u(x) \in \mathrm{Ker}(\iota)$ on en reproduisant la démonstration: si $u(x) \neq 0_F$, avec H un supplémentaire de $\mathbb{K}u(x)$ et ψ tel que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$, $\psi(u(x)) \neq 0$.)
  D'où

$$\forall x \in E, u(x) = 0_F.$$

Donc

$$u = 0_{E\to F}.$$

Son noyau étant $\{0_{E\to F}\}$, on a bien $\boxed{\text{l'application est injective}}$.

Commenter.

De très nombreux commentaires sont possibles (voir tout le reste des cours de mathématiques que vous allez suivre dans vos études).
À titre d'exemple cette opération explique l'importance de la … transposée !
En effet avec $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, et en identifiant
- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,
- $(\mathbb{K}^p)^*$ et $(\mathbb{K}^n)^*$ à $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (produit ligne-colonne),
- $\mathcal{L}(E,F)$ à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (produit par une colonne à droite),
- $\mathcal{L}(F^*,E^*)$ à $M_{p,n}(\mathbb{K})$ (produit par une ligne à gauche).

alors pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a tout simplement $A^* = A^\top$!

3.5. Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Soit $\varphi \in G^*$.
Alors

$$\begin{aligned}(v\circ u)^*(\varphi) &= \varphi \circ (v\circ u)\\ &= (\varphi \circ v)\circ u\\ &= u^*(v^*(\varphi))\\ &= (u^*\circ v^*)(\varphi)\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{(v\circ u)^* = u^*\circ v^*}.$$

Ce n'est que le tout début de la magnifique histoire de la dualité.