Groupe symplectique et groupe spécial linéaire

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet est issu d'un sujet de khôlle donné en PCSI. On y étudie le groupe symplectique et le groupe spécial linéaire, leur génération par les transvections, ainsi que des compléments de type « lemme de Schur » sur les déterminants par blocs.

Notations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On rappelle les notations suivantes:
- on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$,
- on note 0_n la matrice nulle de taille $n \times n$, et I_n la matrice identité de taille $n \times n$,
- on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et inversibles,
- on note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et symétriques, c'est à dire $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\}$,
- on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et antisymétriques, c'est à dire $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M\}$.

On note
- $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,
- $I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité de taille $n \times n$, et $0_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice nulle de taille $n \times n$.

Dans tout le sujet, on dit que $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice de transvection** de taille $n \times n$ si et seulement si il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{n,1}\}$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})\backslash\{0_{1,n}\}$ tels que

$$\begin{aligned} T &= I_n + CL \\ LC &= 0. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, avec $C = E_i$ et $L = E_j^\top$ on a que $I_n + E_{i,j}$ est une matrice de transvection (car $E_j^\top E_i = 0$).

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que sa **trace**, notée $\mathrm{tr}(M)$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
On admet que pour toutes matrices $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ que

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Soient $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
On admet la propriété suivante, appelée **produit par blocs**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}}.$$

Enfin on notera dans ce sujet:
- On note J_n la matrice $(2n) \times (2n)$ définie par les blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

- On définit le groupe spécial linéaire de taille $2n$ par

$$\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

- On définit aussi le groupe symplectique de taille $2n$ par

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^\top J_n M = J_n\}.$$

- Soit $\mathcal{G}$ une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on dit que $\mathcal{G}$ est
  - ▷ stable par produit ssi pour tous $A, B \in \mathcal{G}$, on a $AB \in \mathcal{G}$,
  - ▷ stable par passage à l'inverse ssi pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $A^{-1} \in \mathcal{G}$,
  - ▷ stable par transposée ssi pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $A^\top \in \mathcal{G}$.

1 Premières généralités sur des ensembles de matrices

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

1.1. Montrer que $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, non vide, stable par produit, par passage à l'inverse et par transposée.

1.2. Calculer ${J_n}^2$, et $J_n^\top$, puis montrer que J_n est inversible et déterminer son inverse.
En déduire que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, non vide, stable par produit, par passage à l'inverse et par transposée.

1.3. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ est-il stable par produit ?
Montrer que pour tous $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B^\top AB \in S_n(\mathbb{R})$.

1.4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow \ \forall X \in \mathbb{R}^n, \ X^\top AX = 0.$$

1.5. Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$$

si et seulement si

$$\begin{cases} A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \\ B^\top D \in S_n(\mathbb{R}) \\ A^\top D - C^\top B = I_n \end{cases}.$$

1.6. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s'écrit comme un produit de matrices de transvection, c'est à dire que pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r$ telles que

$$M = T_1 T_2 \cdots T_r.$$

2 Premiers cas

2.7. Montrer que

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

2.8. Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(M) = \pm 1$.

2.9. Déterminer l'ensemble des matrices $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

2.10. Montrer que

$$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \neq \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}).$$

2.11. Montrer qu'il existe $A, B, C, D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

L'objectif du reste du sujet est de montrer que de manière générale on a toujours $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$, c'est à dire que pour tout $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ on a $\det(M) = 1$.

3 Une preuve schuresque I

Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3.12. On définit $f_D \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ par

$$f_D\colon \begin{array}{c}(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}\\ (X_1,\dots,X_n) \mapsto \det\left(\begin{pmatrix} X_1\cdots X_n & B\\ 0_n & D\end{pmatrix}\right)\end{array}.$$

Montrer qu'il existe $\lambda_D \in \mathbb{R}$ tel que $f_D = \lambda_D \det$, c'est à dire tel que pour tous $X_1,\dots,X_n \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$f_D(X_1,\dots,X_n) = \lambda_D \det(X_1\cdots X_n).$$

3.13. On définit $g\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ par

$$g\colon \begin{array}{c}(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}\\ (X_1,\dots,X_n) \mapsto \det\left(\begin{pmatrix} I_n & B\\ 0_n & X_1\cdots X_n\end{pmatrix}\right)\end{array}.$$

Montrer que $g = \det$.

3.14. Conclure que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B\\ 0_n & D\end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D).$$

Dans les questions **3.15.** à **3.17.** on suppose de plus que A est inversible.

3.15. Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n\\ T & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\\ 0_n & \widetilde{D}\end{pmatrix}.$$

3.16. En déduire que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

3.17. En déduire que **si** CA^{-1} est symétrique **alors**

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

3.18. Conclure que **si** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **alors**

$$A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

4 Une preuve schuresque II

4.19. **Question de cours:** Énoncer (sans démonstration) la forme géométrique du théorème du rang.

4.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

À l'aide de la question **4.19.**, montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$$

où $r = \mathrm{rg}(u)$.

4.21. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

À l'aide de la question **4.20.**, montrer qu'il existe des matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PMQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$$

4.22. Déduire des questions précédentes que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$MG \in S_n(\mathbb{R}).$$

On considère désormais $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Par la question **4.22.**, il existe $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^\top G \in S_n(\mathbb{R})$. On fixe un tel G.

On pose ensuite pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} A+tG & B \\ C & D \end{pmatrix}\right).$$

4.23. Montrer que ϕ est une fonction polynomiale.

4.24. On suppose dans cette question que $A^\top C \in S_n(\mathbb{R})$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A+tG) \neq 0$.
Montrer que

$$\phi(t) = \det((A+tG)^\top D - C^\top B).$$

4.25. Conclure que

$$A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

4.26. En déduire que

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$

5 Une preuve engendrée par transvections I

5.27. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ C & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

où $C \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

5.28. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
En déduire que

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A).$$

5.29. Soit T une transvection. Montrer que $\det(T) = 1$.

5.30. Soient $C \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{2n,1}\}$ et $L \in \mathrm{M}_{1,2n}(\mathbb{R})\backslash\{0_{1,2n}\}$.
Montrer que $I_{2n} + CL \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $L = \eta(J_n C)^\top$.

Dans la suite pour $\eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $C \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{2n,1}\}$ on note

$$T_{\eta,C} = I_{2n} + \eta C(J_n C)^\top.$$

On remarque qu'il s'agit d'une transvection car $(J_n C)^\top C = -C^\top J_n C = 0$.
On appelle une telle transvection une **transvection symplectique**.
Dans les questions **5.31.** à **5.34.** on fixe $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $S \neq I_{2n}$.

5.31. Soit $Y \in \mathrm{Im}(S - I_{2n})$ et $Z \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$.
Montrer que

$$Y^\top J_n Z = 0.$$

5.32. Soit $X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$. On pose $Y = (S - I_{2n})X$.
Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y} S - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n}).$$

5.33. Soit $X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$. On pose $Y = (S - I_{2n})X$.
Montrer que

$$(\exists \eta \in \mathbb{R},\ \mathrm{Ker}(T_{\eta,Y} S - I_{2n}) \supset \mathrm{Vect}(X)) \ \Leftrightarrow\ (J_n X)^\top S X \neq 0.$$

5.34. À l'aide des questions précédentes, montrer que **si** $J_n S \notin A_{2n}(\mathbb{R})$ **alors** il existe une transvection symplectique T telle que

$$\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}) - 1.$$

6 Une preuve engendrée par transvections II

Dans les questions **6.35.** à **6.38.** on fixe $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $S \neq I_{2n}$ et $J_n S \in A_{2n}(\mathbb{R})$.

6.35. Montrer que $S^2 = I_{2n}$.

6.36. En déduire qu'il existe $X \in \mathbb{R}^{2n} \backslash \{0\}$ tel que $SX = -X$.

6.37. Soit $X \in \mathbb{R}^{2n} \backslash \{0\}$ tel que $SX = -X$.
Montrer que

$$S\ X(J_n X)^\top = X(J_n X)^\top\ S.$$

6.38. À l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe une transvection symplectique T telle que

$$J_n(TS) \notin A_{2n}(\mathbb{R})$$
$$\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}).$$

6.39. À l'aide des questions des sections 5 et 6 montrer que toute matrice symplectique est produit d'au plus $4n$ transvections symplectique, c'est à dire que pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 4n$ telles que

$$S = T_1 \cdots T_r.$$

6.40. Conclure que

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$