En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet est issu d'un sujet de khôlle donné en PCSI. On y étudie le groupe symplectique et le groupe spécial linéaire, leur génération par les transvections, ainsi que des compléments de type « lemme de Schur » sur les déterminants par blocs.

Notations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On rappelle les notations suivantes:
- on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$,
- on note 0_n la matrice nulle de taille $n \times n$, et I_n la matrice identité de taille $n \times n$,
- on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et inversibles,
- on note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et symétriques, c'est à dire $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\}$,
- on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et antisymétriques, c'est à dire $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M\}$.

On note
- $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,
- $I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité de taille $n \times n$, et $0_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice nulle de taille $n \times n$.

Dans tout le sujet, on dit que $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice de transvection** de taille $n \times n$ si et seulement si il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{n,1}\}$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})\backslash\{0_{1,n}\}$ tels que

$$\begin{aligned} T &= I_n + CL \\ LC &= 0. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, avec $C = E_i$ et $L = E_j^\top$ on a que $I_n + E_{i,j}$ est une matrice de transvection (car $E_j^\top E_i = 0$).

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que sa **trace**, notée $\mathrm{tr}(M)$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
On admet que pour toutes matrices $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ que

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Soient $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
On admet la propriété suivante, appelée **produit par blocs**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}}.$$

Enfin on notera dans ce sujet:
- On note J_n la matrice $(2n) \times (2n)$ définie par les blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

- On définit le groupe spécial linéaire de taille $2n$ par

$$\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

- On définit aussi le groupe symplectique de taille $2n$ par

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^\top J_n M = J_n\}.$$

- Soit $\mathcal{G}$ une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on dit que $\mathcal{G}$ est
  - ▷ stable par produit ssi pour tous $A, B \in \mathcal{G}$, on a $AB \in \mathcal{G}$,
  - ▷ stable par passage à l'inverse ssi pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $A^{-1} \in \mathcal{G}$,
  - ▷ stable par transposée ssi pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $A^\top \in \mathcal{G}$.

1 Premières généralités sur des ensembles de matrices

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

1.1. Montrer que $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, non vide, stable par produit, par passage à l'inverse et par transposée.

- Soit $A \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. On a $\det(A) = 1 \neq 0$, donc $A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. D'où la $\boxed{\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})}$.
- On a $\det(I_{2n}) = 1$, donc $I_{2n} \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ et d'où la $\boxed{\text{non vacuité}}$.
- Soient $A, B \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. On a $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$, donc $AB \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. D'où la $\boxed{\text{stabilité par produit}}$.
- Soit $A \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. On a déjà montré que A est inversible. Et de plus
$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1^{-1} = 1,$$
donc $A^{-1} \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. D'où la $\boxed{\text{stabilité par passage à l'inverse}}$.
- Soit $A \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. On a $\det(A^\top) = \det(A) = 1$, donc $A^\top \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. D'où la $\boxed{\text{stabilité par transposée}}$.

1.2. Calculer ${J_n}^2$, et $J_n^\top$, puis montrer que J_n est inversible et déterminer son inverse.

Par un calcul de produit par blocs on a
$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = \boxed{-I_{2n}}.$$
Par conséquent $\boxed{J_n \text{ est inversible}}$ et
$$\boxed{J_n^{-1} = -J_n = J_n^\top}.$$

En déduire que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, non vide, stable par produit, par passage à l'inverse et par transposée.

- Soit $A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. On a $A^\top J_n A = J_n$, par conséquent en multipliant à gauche par $J_n^{-1} = -J_n$ on a
$$-J_n A^\top J_n A = -J_n J_n = I_{2n}.$$
Donc A est inversible et $A^{-1} = -J_n A^\top J_n$. D'où $\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})}$.
- On a $I_{2n}^\top J_n I_{2n} = J_n$, donc $I_{2n} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ et d'où la $\boxed{\text{non vacuité}}$.
- Soient $A, B \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ on a
$$\begin{aligned}(AB)^\top J_n (AB) &= (B^\top A^\top) J_n (AB) \\ &= B^\top (A^\top J_n A) B \\ &= B^\top J_n B \\ &= J_n.\end{aligned}$$
Donc $AB \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
D'où la $\boxed{\text{stabilité par produit}}$.
- Soit $A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. On a déjà vu que A est inversible. De plus
$$A^\top J_n A = J_n$$
donc en multipliant à droite par A^{-1} et à gauche par $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ on a
$$(A^{-1})^\top J_n A^{-1} = J_n.$$
Donc $A^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
D'où la $\boxed{\text{stabilité par passage à l'inverse}}$.
- On a déjà montré que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est stable par inverse, par produit et de plus on a
$$(J_n)^\top J_n J_n = -J_n^2 J_n = J_n$$
d'où $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ et donc $-J_n = J_n^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
On a déjà vu que $A^{-1} = -J_n A^\top J_n$.

Donc

$$A^\top = J_n A^{-1}(-J_n)$$

et donc par les stabilités précédentes $A^\top \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
D'où la $\boxed{\text{stabilité par transposée}}$.

1.3. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ est-il stable par produit ?
Montrer que pour tous $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B^\top AB \in S_n(\mathbb{R})$.

- Si $n = 1$ alors $S_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et est stable par produit.
- Si $n = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a bien $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{R})$.
- Si $n \geq 2$ alors les blocs $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ sont respectivement dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mais $\widetilde{A}\widetilde{B} \notin S_n(\mathbb{R})$.
  Donc, pour $n \geq 2$, $\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas stable par produit}}$.
- Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a

  $$(B^\top AB)^\top = B^\top A^\top B = B^\top AB$$

  car A est symétrique.
  Donc $\boxed{B^\top AB \in S_n(\mathbb{R})}$.

1.4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow \ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX = 0.$$

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \in A_n(\mathbb{R})$.
  Soit $X \in \mathbb{R}^n$.
  On a (en tant que matrice 1×1)

  $$\begin{aligned} X^\top AX &= (X^\top AX)^\top \\ &= X^\top A^\top X \\ &= -X^\top AX \end{aligned}$$

  et donc $(2 \neq 0)$

  $$\boxed{X^\top AX = 0}.$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top AX = 0$.
  Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
  Avec $X = E_i + E_j$ on a

  $$\begin{aligned} 0 &= X^\top AX \\ &= (E_i + E_j)^\top A(E_i + E_j) \\ &= E_i^\top AE_i + E_i^\top AE_j + E_j^\top AE_i + E_j^\top AE_j \\ &= 0 + A_{i,j} + A_{j,i} + 0 \end{aligned}$$

  et donc

  $$A_{i,j} = -A_{j,i}.$$

  Comme c'est le cas pour tout (i, j), on a $\boxed{A \in A_n(\mathbb{R})}$.

1.5. Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$$

si et seulement si

$$\begin{cases} A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \\ B^\top D \in S_n(\mathbb{R}) \\ A^\top D - C^\top B = I_n \end{cases}.$$

Par produit par blocs on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\top J_n \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^\top C - C^\top A & A^\top D - C^\top B \\ B^\top C - D^\top A & B^\top D - D^\top B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette matrice par blocs est égale à J_n si et seulement si

$$\begin{cases} A^\top C - C^\top A &= 0_n \\ A^\top D - C^\top B &= I_n \\ B^\top C - D^\top A &= -I_n \\ B^\top D - D^\top B &= 0_n \end{cases}$$

c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} A^\top C - (A^\top C)^\top &= 0_n \\ B^\top D - (B^\top D)^\top &= 0_n \\ A^\top D - C^\top B &= I_n \\ (A^\top D - C^\top B)^\top &= I_n \end{cases}.$$

Les deux dernières équations étant équivalentes on en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \\ B^\top D \in S_n(\mathbb{R}) \\ A^\top D - C^\top B = I_n \end{cases}}.$$

1.6. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s'écrit comme un produit de matrices de transvection, c'est à dire que pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r$ telles que

$$M = T_1 T_2 \cdots T_r.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

On procède par algorithme du pivot de Gauss.

- Si $c \neq 0$ alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -(a-1)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b - d(a-1)c^{-1} \\ c & d \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b - d(a-1)c^{-1} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b - d(a-1)c^{-1} \\ 0 & (ad - bc) \end{pmatrix}$$

et comme $ad - bc = 1$ on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -(b - d(a-1)c^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b - d(a-1)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que

$$\begin{pmatrix} 1 & -(b - d(a-1)c^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(a-1)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme l'inverse d'une matrice de transvection $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la transvection $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a-1)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b-d(a-1)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque: plutôt que de procéder par pivot on aurait pu tout simplement constater que ce produit matriciel convient. De plus il n'y a pas unicité d'une telle écriture.

- Si $c = 0$. Alors $a \neq 0$ (car M est inversible).
  Et par exemple pour n'importe quel $\lambda \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b + d \end{pmatrix}$$

  c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b + d \end{pmatrix}$$

  et $\lambda a \neq 0$, d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b + d \end{pmatrix}$ est un produit de 3 transvections, et donc M est un $\boxed{\text{produit de 4 transvections}}$.
  Remarque: si $c = 0$ et $b \neq 0$ on pourrait raisonner dans le cas $c \neq 0$, par transposée.
  Resterait alors à traiter le cas $b = c = 0$ c'est à dire $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. On pourrait trouver "par hasard" une telle écriture, par exemple $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais cela revient essentiellement à se ramener au cas $c \neq 0$.

2 Premiers cas

2.7. Montrer que

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

On a $S_1(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ en effet pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a)^\top = (a)$.
Par conséquent par la question **1.5.**, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ac \in \mathbb{R} \\ bd \in \mathbb{R} \\ ad - cb = 1 \end{cases}.$$

Les deux premières conditions sont toujours vérifiées et la dernière est exactement $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 1$.
On a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}.$$

2.8. Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(M) = \pm 1$.

On a

$$M^\top J_n M = J_n.$$

En passant au déterminant on obtient donc

$$\det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$$

c'est à dire (la multiplication sur $\mathbb{R}$ est commutative, et déterminant d'une transposée),

$$\det(M)^2 \det(J_n) = \det(J_n).$$

Or J_n est inversible par la question **1.2.**, donc $\det(J_n) \neq 0$.
Donc

$$\det(M)^2 = 1$$

et par conséquent

$$\boxed{\det(M) = \pm 1}.$$

2.9. Déterminer l'ensemble des matrices $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Par la question **1.5.** on a

$$\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} I_n^\top 0_n \in S_n(\mathbb{R}) \\ T^\top I_n \in S_n(\mathbb{R}) \\ I_n^\top I_n - 0_n^\top T = I_n \end{cases}.$$

La première et la troisième conditions sont toujours vérifiées.
Donc

$$\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad T^\top \in S_n(\mathbb{R})$$

ce qui équivaut à

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad T \in S_n(\mathbb{R})}.$$

2.10. Montrer que

$$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \neq \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}).$$

Soit par exemple

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $T \notin S_2(\mathbb{R})$.
Par la question **2.9.** on a donc

$$\begin{pmatrix} I_2 & T \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}).$$

Mais (déterminant d'une matrice triangulaire),

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_2 & T \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Ainsi on a bien une matrice de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \neq \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})}.$$

2.11. Montrer qu'il existe $A, B, C, D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

Par exemple on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que A, B, C, D ne sont pas inversibles.
De plus par la question **1.5.** on a

$$\begin{cases} A^\top C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \\ B^\top D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \\ A^\top D - C^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{cases}$$

et donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})}.$$

L'objectif du reste du sujet est de montrer que de manière générale on a toujours $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$, c'est à dire que pour tout $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ on a $\det(M) = 1$.

3 Une preuve schuresque I

Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3.12. On définit $f_D \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ par

$$f_D \colon \begin{array}{c} (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det\left(\begin{pmatrix} X_1 \cdots X_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right). \end{array}$$

Montrer qu'il existe $\lambda_D \in \mathbb{R}$ tel que $f_D = \lambda_D \det$, c'est à dire tel que pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$f_D(X_1, \dots, X_n) = \lambda_D \det(X_1 \cdots X_n).$$

L'application f_D est une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$, par conséquent il existe $\lambda_D \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{f_D(X_1, \dots, X_n) = \lambda_D \det(X_1 \cdots X_n).}$$

3.13. On définit $g \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ par

$$g \colon \begin{array}{c} (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & X_1 \cdots X_n \end{pmatrix}\right). \end{array}$$

Montrer que $g = \det$.

Soit $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$.
On a par calcul par blocs (transvection par blocs)

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & X_1 \cdots X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0 & X_1 \cdots X_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi g est n-linéaire alternée et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \det$.
En évaluant en $(X_1, \dots, X_n) = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on en déduit que

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right) = \lambda \det(I_n)$$

et donc par déterminant triangulaire

$$1 = \lambda \times 1.$$

D'où

$$\boxed{g = \det}.$$

Remarque: une alternative est de montrer que g est une forme n-linéaire alternée car le déterminant est une forme n-linéaire alternée des **lignes**.

3.14. Conclure que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D).$$

D'après la question **3.12.** il existe $\lambda_D \in \mathbb{R}$ tel que $f_D = \lambda_D \det$.
En évaluant en $(X_1, \dots, X_n) = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \lambda_D \det(I_n).$$

De plus avec $(D_1, \dots, D_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ les colonnes de D on a d'après la question **3.13.**

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D_1 \cdots D_n \end{pmatrix}\right) = \det((D_1 \cdots D_n)) = \det(D)$$

d'où

$$\boxed{\lambda_D = \det(D)}.$$

En évaluant en $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ les colonnes de A on en déduit donc que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(D)\det(A_1 \cdots A_n).$$

C'est à dire

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)}.$$

Dans les questions **3.15.** à **3.17.** on suppose de plus que A est inversible.

3.15. Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ T & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \widetilde{D} \end{pmatrix}.$$

On a de manière générale, pour tout $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, par produit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ T & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ TA+C & TB+D \end{pmatrix}.$$

Avec

$$\boxed{\begin{aligned} T &= -CA^{-1} \\ \widetilde{D} &= D - CA^{-1}B \end{aligned}}$$

on a donc bien

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}}.$$

3.16. En déduire que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Par la question **3.15.** on a

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

et donc en particulier

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\right)\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\right)$$

Or comme matrice triangulaire,

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\right) = 1$$

et par la question **3.14.** on a

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Par conséquent on a bien

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)}.$$

3.17. En déduire que **si** CA^{-1} est symétrique **alors**

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

Supposons que CA^{-1} est symétrique, c'est à dire que $CA^{-1} = (CA^{-1})^\top = (A^{-1})^\top C^\top$.
Alors, par la question **3.16.** et comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée on a

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \\ &= \det(A^\top)\det(D - (A^{-1})^\top C^\top B) \\ &= \det(A^\top D - A^\top (A^{-1})^\top C^\top B).\end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

3.18. Conclure que **si** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **alors**

$$A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

on a $A^\top C \in S_n(\mathbb{R})$ c'est à dire

$$A^\top C = C^\top A.$$

D'où (comme A est inversible)

$$\begin{aligned}(CA^{-1})^\top &= (A^{-1})^\top C^\top \\ &= (A^{-1})^\top \left(A^\top C A^{-1}\right) \\ &= \left(A^{-1}A\right)^\top C A^{-1} \\ &= CA^{-1}.\end{aligned}$$

c'est à dire

$$CA^{-1} \in S_n(\mathbb{R}).$$

Donc par la question **3.17.** on a

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

4 Une preuve schuresque II

4.19. Question de cours: Énoncer (sans démonstration) la forme géométrique du théorème du rang.

Soient E, F des espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.
Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.

4.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
À l'aide de la question **4.19.**, montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où $r = \mathrm{rg}(u)$.

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à $S \oplus \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$ c'est à dire $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de S et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
On a par la forme géométrique du théorème du rang que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ (l'image d'une base par un isomorphisme est une base).
C'est en particulier une famille libre de $\mathbb{R}^n$ que l'on peut compléter (théorème de la base incomplète) en

$(u(e_1),\dots,u(e_r),f_{r+1},\dots,f_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Posons

$$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$$
$$\mathcal{C}=(u(e_1),\dots,u(e_r),f_{r+1},\dots,f_n).$$

Ce sont bien des bases de $\mathbb{R}^n$ et par construction,

$$\forall j\in\{1,\dots,r\},\quad u(e_j)=u(e_j)$$
$$\forall j\in\{r+1,\dots,n\},\quad u(e_j)=0_{\mathbb{R}^n}$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}}.$$

De plus comme S (de dimension r) est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$ on a

$$\boxed{r=\mathrm{rg}(u)}.$$

4.21. Soit $M\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
À l'aide de la question **4.20.**, montrer qu'il existe des matrices $P,Q\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PMQ^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$$

Notons

$$u:\begin{array}{c}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\\ X\mapsto MX\end{array}$$

l'application canoniquement associée à M.
Notons aussi $\mathcal{C}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Par la question **4.20.** il existe des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}.$$

De plus

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_0}(u)=M.$$

En posant

$$P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$$
$$Q=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

on obtient alors (formule de changement de bases)

$$\boxed{PMQ^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}}.$$

4.22. Déduire des questions précédentes que pour tout $M\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice $G\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$MG\in S_n(\mathbb{R}).$$

Soit $M\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Par la question **4.21.** il existe des matrices $P,Q\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PMQ^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$$

c'est à dire en notant $S_r=\begin{pmatrix}I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$,

$$M=P^{-1}S_rQ.$$

Posons

$$G = Q^{-1}(P^{-1})^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Alors

$$MG = P^{-1}S_rQQ^{-1}(P^{-1})^\top = P^{-1}S_r(P^{-1})^\top.$$

Or $S_r \in S_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc par la question **1.3.**, $P^{-1}S_r(P^{-1})^\top \in S_n(\mathbb{R})$.
Donc

$$\boxed{MG \in S_n(\mathbb{R})}.$$

On considère désormais $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Par la question **4.22.**, il existe $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^\top G \in S_n(\mathbb{R})$. On fixe un tel G.
On pose ensuite pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} A+tG & B \\ C & D \end{pmatrix}\right).$$

4.23. Montrer que ϕ est une fonction polynomiale.

Par développement par ligne et par colonnes et par récurrence immédiate on a bien que ϕ est une fonction polynomiale.

4.24. On suppose dans cette question que $A^\top C \in S_n(\mathbb{R})$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A+tG) \neq 0$.
Montrer que

$$\phi(t) = \det((A+tG)^\top D - C^\top B).$$

On a $A^\top C \in S_n(\mathbb{R})$ et par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A+tG)^\top C = A^\top C + tG^\top C \in S_n(\mathbb{R}).$$

(En effet $G^\top C = (C^\top G)^\top \in S_n(\mathbb{R})$).
Par conséquent soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A+tG) \neq 0$ alors $A+tG$ est inversible, et donc par la question **3.18.** on a

$$\det\left(\begin{pmatrix} A+tG & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det((A+tG)^\top D - C^\top B).$$

On a donc bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A+tG) \neq 0$,

$$\boxed{\phi(t) = \det((A+tG)^\top D - C^\top B)}.$$

4.25. Conclure que

$$A^\top C \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

Posons

$$\psi : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \det((A+tG)^\top D - C^\top B) \end{array}.$$

Par exactement le même argument que la question **4.23.** on a que ψ est une fonction polynomiale.
De même $t \mapsto \det(A+tG)$ est une fonction polynomiale.
Cette fonction polynomiale n'est pas identiquement nulle, par exemple en remarquant qu'il s'agit de $t \mapsto \det(G)\det(tI_n + G^{-1}A)$ et qu'en développant successivement il s'agit d'un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $\det(G)$ qui est non nul.
Par conséquent par la question **4.24.** on a que ϕ et ψ coïncident sur un ensemble infini de points, et comme ce sont des fonctions polynomiales, on en déduit que $\phi = \psi$.
En particulier, en évaluant $t = 0$,

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A^\top D - C^\top B)}.$$

4.26. En déduire que

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$

Soit $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
Par la question **1.5.** on a $A^\top C \in S_n(\mathbb{R})$.
Donc par la question **4.25.** on a

$$\det(S) = \det(A^\top D - C^\top B).$$

Toujours par la question **1.5.** on a $A^\top D - C^\top B = I_n$.
Donc

$$\det(S) = 1.$$

Et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$

5 Une preuve engendrée par transvections I

5.27. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ C & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

où $C \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

Comme u est de rang 1, on a par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1$ c'est à dire $\mathrm{Ker}(u)$ est un hyperplan.
Soit $e_1 \notin \mathrm{Ker}(u)$.
Alors comme droite non contenue dans un hyperplan on a

$$\mathbb{R}e_1 \oplus \mathrm{Ker}(u) = E.$$

On peut donc compléter e_1 en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_2, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
Alors comme

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ u(e_j) = 0_E$$

on a la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n-1} \\ C & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

De plus la trace est un invariant de similitude.
Donc

$$\mathrm{tr}(u) = \alpha + 0.$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ C & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}.$$

Remarque: on pourrait même montrer que si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$ alors on peut trouver $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$,
et si $\mathrm{tr}(u) = 0$ alors on peut trouver $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-2,1} & 0_{n-2,n-1} \end{pmatrix}$.

5.28. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
En déduire que

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A).$$

Soit

$$u\colon \begin{array}{c}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto AX\end{array}$$

l'application linéaire canoniquement associée à A. On a alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 1$.
Par la question **5.27.** il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ C & 0_{n-1,n-1}\end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + u) = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{tr}(u) & 0_{1,n-1} \\ C & I_{n-1}\end{pmatrix}$$

d'où

$$\det(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + u) = (1+\mathrm{tr}(u)) \times 1 = 1 + \mathrm{tr}(u).$$

C'est à dire (comme la trace et le déterminant sont des invariants de similitude)

$$\boxed{\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A)}.$$

5.29. Soit T une transvection. Montrer que $\det(T) = 1$.

Soit T une transvection, il existe $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $LC = 0$ et $T = I_n + CL$.
On a

$$\mathrm{rg}(CL) \leq \min(\mathrm{rg}(C), \mathrm{rg}(L)) = 1$$

et $CL \neq 0$, par exemple car $CLL^\top \neq 0$.
Donc par la question **5.28.** on a

$$\det(T) = \det(I_n + CL) = 1 + \mathrm{tr}(CL).$$

Or $\mathrm{tr}(CL) = \mathrm{tr}(LC) = 0$.
Donc

$$\boxed{\det(T) = 1}.$$

5.30. Soient $C \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{2n,1}\}$ et $L \in \mathrm{M}_{1,2n}(\mathbb{R})\backslash\{0_{1,2n}\}$.
Montrer que $I_{2n} + CL \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $L = \eta(J_n C)^\top$.

On a

$$\begin{aligned}(I_{2n} + CL)^\top J_n (I_{2n} + CL) &= J_n + L^\top C^\top J_n + J_n CL + L^\top \underbrace{C^\top J_n C}_{=0} L \\ &= J_n + L^\top C^\top J_n + J_n CL.\end{aligned}$$

Ainsi $I_{2n} + CL \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$L^\top C^\top J_n + J_n CL = 0.$$

De plus comme $CL \neq 0_{2n,2n}$ et J_n est inversible on a $J_n CL \neq 0_{2n,2n}$.
Comme de plus $\mathrm{Im}(J_n CL) \subset \mathrm{Vect}(J_n C)$ on a donc

$$\mathrm{Im}(J_n CL) = \mathrm{Vect}(J_n C).$$

De même on a $\mathrm{Im}(L^\top C^\top J_n) \subset \mathrm{Vect}(L^\top)$ et $L^\top C^\top J_n \neq 0_{2n,2n}$, donc

$$\mathrm{Im}(L^\top C^\top J_n) = \mathrm{Vect}(L^\top).$$

Par conséquent il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$L^\top = \eta J_n C$$

c'est à dire,

$$L = \eta(J_n C)^\top.$$

(Et $\eta \neq 0$ car $L \neq 0_{1,2n}$).
Réciproquement si $L = \eta(J_nC)^\top$ alors

$$\begin{aligned} L^\top C^\top J_n + J_n C L &= \eta J_n C C^\top J_n + \eta J_n C (J_n C)^\top \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{I_{2n} + CL \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, L = \eta(J_nC)^\top}.$$

Dans la suite pour $\eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $C \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{2n,1}\}$ on note

$$T_{\eta,C} = I_{2n} + \eta C(J_nC)^\top.$$

On remarque qu'il s'agit d'une transvection car $(J_nC)^\top C = -C^\top J_n C = 0$.
On appelle une telle transvection une **transvection symplectique**.
Dans les questions **5.31.** à **5.34.** on fixe $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $S \neq I_{2n}$.

5.31. Soit $Y \in \mathrm{Im}(S - I_{2n})$ et $Z \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$.
Montrer que

$$Y^\top J_n Z = 0.$$

Soit $X \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $Y = (S - I_{2n})X$.
On a alors, comme $SZ = Z$, puis comme $S^\top J_n S = J_n$,

$$\begin{aligned} Y^\top J_n Z &= X^\top (S - I_{2n})^\top J_n Z \\ &= X^\top S^\top J_n Z - X^\top J_n Z \\ &= X^\top S^\top J_n S Z - X^\top J_n Z \\ &= X^\top J_n Z - X^\top J_n Z \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{Y^\top J_n Z = 0}.$$

5.32. Soit $X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$. On pose $Y = (S - I_{2n})X$.
Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n}).$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}$.
Soit $Z \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$.
On a alors d'après la question **5.31.** que $Y^\top J_n Z = 0$, et comme par définition $SZ = Z$,

$$\begin{aligned} (T_{\eta,Y}S - I_{2n})Z &= (I_{2n} + \eta Y(J_nY)^\top)SZ - Z \\ &= SZ + \eta Y(J_nY)^\top Z - Z \\ &= SZ + 0_{2n} - Z \\ &= 0_{2n}. \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n})}$.

5.33. Soit $X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$. On pose $Y = (S - I_{2n})X$.
Montrer que

$$(\exists \eta \in \mathbb{R},\ \mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supset \mathrm{Vect}(X)) \ \Leftrightarrow\ (J_nX)^\top SX \neq 0.$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned}(T_{\eta,Y}S - I_{2n})X &= (I_{2n} + \eta Y(J_nY)^\top)SX - X\\ &= SX + \eta Y(J_nY)^\top SX - X\\ &= Y + \eta Y(J_nY)^\top SX\\ &= (1 + \eta(J_nY)^\top SX)Y.\end{aligned}$$

Et de plus

$$\begin{aligned}(J_nY)^\top SX &= -Y^\top J_nSX\\ &= -(SX - X)^\top J_nSX\\ &= -X^\top S^\top J_nSX + X^\top J_nSX\\ &= -0 + X^\top J_nSX.\end{aligned}$$

D'où il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1 + \eta(J_nY)^\top SX) = 0$$

ssi

$$(J_nY)^\top SX \neq 0$$

ssi

$$\boxed{(J_nX)^\top SX \neq 0}.$$

5.34. À l'aide des questions précédentes, montrer que **si** $J_nS \notin A_{2n}(\mathbb{R})$ **alors** il existe une transvection symplectique T telle que

$$\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}) - 1.$$

Supposons que $J_nS \notin A_{2n}(\mathbb{R})$.
Alors par la question **1.4.** il existe $X \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $(J_nX)^\top SX = -X^\top J_nSX \neq 0$.
En particulier $\boxed{X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})}$.
En effet

$$X \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n}) \Rightarrow SX = X \Rightarrow (J_nX)^\top SX = (J_nX)^\top X = 0.$$

En posant $Y = (S - I_{2n})X$ on a alors d'après les questions précédentes que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$ et qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supsetneq \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$.
On a donc en fixant ce η,

$$\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n}) \oplus \mathrm{Vect}(X).$$

Par conséquent (dimension d'une somme directe)

$$\dim(\mathrm{Ker}(T_{\eta,Y}S - I_{2n})) \geq \dim(\mathrm{Ker}(S - I_{2n})) + 1$$

et donc par théorème du rang,

$$\boxed{\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}) - 1}.$$

6 Une preuve engendrée par transvections II

Dans les questions **6.35.** à **6.38.** on fixe $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $S \neq I_{2n}$ et $J_nS \in A_{2n}(\mathbb{R})$.
6.35. Montrer que $S^2 = I_{2n}$.

Comme $J_nS \in A_{2n}(\mathbb{R})$, on a (comme $J_n^\top = -J_n$)

$$J_nS = -(J_nS)^\top = S^\top J_n.$$

D'où

$$J_nS^2 = S^\top J_nS$$

et comme $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$,

$$J_n S^2 = J_n.$$

Comme J_n est inversible on a alors

$$\boxed{S^2 = I_{2n}}.$$

6.36. En déduire qu'il existe $X \in \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ tel que $SX = -X$.

Comme $S^2 = I_{2n}$ on a S est une symétrie et donc

$$\mathrm{Ker}(S - I_{2n}) \oplus \mathrm{Ker}(S + I_{2n}) = \mathbb{R}^{2n}.$$

Comme de plus $S - I_{2n} \neq 0_{2n,2n}$ on a $\mathrm{Ker}(S - I_{2n}) \neq \mathbb{R}^{2n}$, et donc $\mathrm{Ker}(S + I_{2n}) \neq \{0\}$.
Donc il existe $X \in \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ tel que $\boxed{SX = -X}$.

6.37. Soit $X \in \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ tel que $SX = -X$.
Montrer que

$$S\ X(J_nX)^\top = X(J_nX)^\top\ S.$$

Comme $SX = -X$ puis que $J_n = S^\top J_n S$ on a

$$\begin{aligned} SX(J_nX)^\top &= -SXX^\top J_n \\ &= XX^\top J_n \\ &= XX^\top S^\top J_n S \\ &= -X(J_nSX)^\top S \\ &= X(J_nX)^\top S. \end{aligned}$$

d'où on a bien

$$\boxed{S\ X(J_nX)^\top = X(J_nX)^\top\ S}.$$

6.38. À l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe une transvection symplectique T telle que

$$J_n(TS) \notin A_{2n}(\mathbb{R})$$
$$\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}).$$

D'après la question **6.36.** il existe $X \in \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ tel que $SX = -X$.
En posant par exemple

$$T = T_{1,X} = I_{2n} + X(J_nX)^\top$$

on a donc $\boxed{T \text{ est une transvection symplectique}}$
De plus d'après la question **6.37.** on a $S\ X(J_nX)^\top = X(J_nX)^\top\ S$ et donc

$$TS = S + X(J_nX)^\top S = S + SX(J_nX)^\top = (I_{2n} + X(J_nX)^\top)S = ST.$$

et donc

$$(TS)^2 = TSTS = T^2S^2 = T^2.$$

Or

$$T^2 = T_{2,X} = I_{2n} + 2X(J_nX)^\top \neq I_{2n}$$

d'où

$$T^2S^2 = T^2 \neq I_{2n}.$$

Par la contraposée de la question **6.35.** on a alors

$$\boxed{J_n(TS) \notin A_{2n}(\mathbb{R})}.$$

Il reste à montrer l'inégalité sur le rang.
On a $SX = -X$ et donc

$$(S - I_{2n})(-\frac{1}{2})X = -\frac{1}{2}(-X - X) = X.$$

Et de plus $-\frac{1}{2}X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$ car $X \notin \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$.
Par conséquent, d'après la question **5.32.**, on a

$$\mathrm{Ker}(TS - I_{2n}) \supset \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$$

et donc par théorème du rang

$$\boxed{\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n})}.$$

6.39. À l'aide des questions des sections 5 et 6 montrer que toute matrice symplectique est produit d'au plus $4n$ transvections symplectique, c'est à dire que pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 4n$ telles que

$$S = T_1 \cdots T_r.$$

Montrons par récurrence forte sur $d = \mathrm{rg}(S - I_{2n})$ que pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(S - I_{2n}) = d$, il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 2d$ telles que $S = T_1 \cdots T_r$.

- **Initialisation:**
  Pour $d = 0$, si $S = I_{2n}$, on peut prendre $r = 0$ transvections symplectiques, ce qui vérifie la propriété.
- **Hérédité:** Soit $d \in [\![0, 2n-1]\!]$ et supposons que pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(S - I_{2n}) \leq d - 1$, il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 2(d-1)$ telles que $S = T_1 \cdots T_r$.
  Soit $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(S - I_{2n}) = d$.
  On procède par disjonction de cas:
  - Si $J_n S \notin A_{2n}(\mathbb{R})$ alors d'après la question **5.34.** il existe une transvection symplectique T telle que $\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}) - 1 = d - 1$.
    Par hypothèse de récurrence il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 2(d-1)$ telles que $TS = T_1 \cdots T_r$, et donc
    $$S = T^{-1} T_1 \cdots T_r$$
    est produit de $r + 1 \leq 2(d-1) + 1 = 2d - 1 < 2d$ transvections symplectiques.
  - Si $J_n S \in A_{2n}(\mathbb{R})$ alors par la question **6.38.** il existe une transvection symplectique T telle que $J_n(TS) \notin A_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}(TS - I_{2n}) \leq \mathrm{rg}(S - I_{2n}) = d$.
    Par conséquent on est dans le cas précédent avec TS à la place de S, et on en déduit que TS est produit de moins de $2d-1$ transvections symplectiques, et donc que S est produit de moins de $2d-1+1 = 2d$ transvections symplectiques.
- **Conclusion**
  Par conséquent pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(S - I_{2n}) = d$, il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 2d$ telles que $S = T_1 \cdots T_r$.
  En particulier, pour toute matrice $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, comme $\mathrm{rg}(S - I_{2n}) \leq 2n$, il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 4n$ telles que

$$\boxed{S = T_1 \cdots T_r}.$$

6.40. Conclure que

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$

Soit $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
Par la question **6.39.** il existe des transvections symplectiques $T_1, \ldots, T_r$ avec $r \leq 4n$ telles que

$$S = T_1 \cdots T_r.$$

Alors, comme d'après la question **5.29.** pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\det(T_i) = 1$.

$$\det(S) = \det(T_1) \cdots \det(T_r) = 1 \cdots 1 = 1.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})}.$$