On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet propose une démonstration alternative de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire, reposant sur le lemme de Gronwall.

---

1. Unicité de la solution du problème de Cauchy par lemme de Gronwall

1.I. Lemme différentiel de Gronwall

Soit $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $y \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) \leq \alpha(t)y(t).$$

1.1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s}.$$

1.II. Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

On cherche à montrer qu'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 admet au plus une solution, c'est à dire on cherche à démontrer

Théorème 1 (Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2)
Soient $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $(Y_0, Y_1) \in \mathbb{C}^2$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y''(t) + \alpha_1(t)y'(t) + \alpha_0(t)y(t) &= b(t) \\ y'(0) = Y_1, y(0) &= Y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

admet au plus une solution.

1.2. Expliquer pourquoi il **suffit** de prouver le Théorème 1.II dans le cas $Y_1 = Y_0 = 0$ et $b = 0$ (la fonction nulle).

Dans la suite on considère donc y une solution du problème de Cauchy (1) dans le cas $Y_1 = Y_0 = 0$ et $b = 0$.
L'objectif est donc de démontrer que y est nulle.

1.3. Montrer que la fonction $m = \max(|\alpha_0|, |\alpha_1| + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
1.4. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\left|y''(t)\right| + \left|y'(t)\right| \leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|)$$

1.5. Pour $t \geq 0$, on pose

$$u(t) = \int_0^t \left|y''(s)\right| + \left|y'(s)\right| \ \mathrm{d}s.$$

Montrer que u est dérivable et que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u'(t) \leq m(t)u(t).$$

1.6. En déduire que $u = 0$.
1.7. Conclure.

1.III. Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\right)^n$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $(Y_{n-1}, \ldots, Y_0) \in \mathbb{C}^n$.

1.8. En s'inspirant de la partie précédente montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y &= b \\ (y^{(n-1)}(0), \ldots, y'(0), y(0)) &= (Y_{n-1}, \ldots, Y_1, Y_0). \end{aligned}$$

admet au plus une solution.