En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet propose une démonstration alternative de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire, reposant sur le lemme de Gronwall.

---

1. Unicité de la solution du problème de Cauchy par lemme de Gronwall

1.I. Lemme différentiel de Gronwall

Soit $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $y \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) \leq \alpha(t)y(t).$$

1.1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s}.$$

Soit

$$\gamma : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s} \end{array}.$$

Alors γ est dérivable et on a pour tout $t \geq 0$, $y(t) = \gamma(t)e^{\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s}$.
Par dérivée d'un produit l'inéquation se réécrit donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma'(t) \leq 0.$$

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma(t) \leq \gamma(0) = y(0).$$

On conclut, comme pour tout $t \geq 0$, $e^{\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s} > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \boxed{y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s}}.$$

1.II. Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

On cherche à montrer qu'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 admet au plus une solution, c'est à dire on cherche à démontrer

Théorème 1 (Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2)
Soient $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $(Y_0, Y_1) \in \mathbb{C}^2$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y''(t) + \alpha_1(t)y'(t) + \alpha_0(t)y(t) &= b(t) \\ y'(0) = Y_1, y(0) &= Y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

admet au plus une solution.

1.2. Expliquer pourquoi il **suffit** de prouver le Théorème 1.II dans le cas $Y_1 = Y_0 = 0$ et $b = 0$ (la fonction nulle).

On veut montrer que l'application

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \\ y \mapsto (y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y, y(0), y'(0)) \end{array}$$

est injective.
Par linéarité (principe de superposition) il suffit de montrer que son noyau est $\{0\}$.

Dans la suite on considère donc y une solution du problème de Cauchy (1) dans le cas $Y_1 = Y_0 = 0$ et $b = 0$.

L'objectif est donc de démontrer que y est nulle.

1.3. Montrer que la fonction $m = \max(|\alpha_0|, |\alpha_1| + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soient x, y deux réels. Par disjonction de cas $\max(x,y) = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}$.
Par conséquent

$$m = \frac{(|\alpha_0| + |\alpha_1| + 1) + ||\alpha_0| - |\alpha_1| - 1|}{2}.$$

Comme α_0, α_1 et $|\cdot|$ sont continues, on en déduit par opérations et composées que $\boxed{m \text{ est continue}}$.

1.4. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\left|y''(t)\right| + \left|y'(t)\right| \leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|)$$

Soit $t \geq 0$. On a par inégalité triangulaire et comme par définition $|\alpha_0(t)| \leq m(t)$ et $|\alpha_1(t)| + 1 \leq m(t)$,

$$\begin{aligned} |y''(t)| + |y'(t)| &= |-\alpha_0(t)y(t) - \alpha_1(t)y'(t)| + |y'(t)| \\ &\leq |\alpha_0(t)||y(t)| + |\alpha_1(t)||y'(t)| + |y'(t)| \\ &\leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|). \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout $t \geq 0$, $\boxed{|y''(t)| + |y'(t)| \leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|)}$.

1.5. Pour $t \geq 0$, on pose

$$u(t) = \int_0^t \left|y''(s)\right| + \left|y'(s)\right| \, \mathrm{d}s.$$

Montrer que u est dérivable et que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ u'(t) \leq m(t)u(t).$$

Par Théorème Fondamental de l'Analyse, u est dérivable et on a pour tout $t \geq 0$,

$$u'(t) = |y''(t)| + |y'(t)|$$

et d'après la question précédente on a donc pour tout $t \geq 0$,

$$u'(t) \leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|).$$

Or par Théorème Fondamental de l'Analyse, les conditions initiales et inégalité triangulaire on a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |y'(t)| + |y(t)| &= \left|y'(0) + \int_0^t y''(s)\mathrm{d}s\right| + \left|y(0) + \int_0^t y'(s)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_0^t y''(s)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^t y'(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_0^t |y''(s)| + |y'(s)| \ \mathrm{d}s \\ &= u(t). \end{aligned}$$

On en déduit donc bien (comme $m \geq 0$),

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \ u'(t) \leq m(t)u(t)}.$$

1.6. En déduire que $u = 0$.

Par la question précédente et le lemme différentiel de Gronwall, on a pour tout $t \geq 0$, (comme $u(0) = 0$)

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t m(s)\mathrm{d}s} = 0.$$

De plus pour tout $t \geq 0$ on a $u(t) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive entre 0 et $t \geq 0$.
D'où $\boxed{u = 0}$.

1.7. Conclure.

Soit $t \geq 0$. On a:
- $0 \leq t$,
- $|y'| + |y''|$ positive et continue sur $[0, t]$
- $\int_0^t (|y'| + |y''|)(s)\mathrm{d}s = 0$.

Par conséquent pour tout $s \in [0, t]$, $|y'(s)| + |y''(s)| = 0$ et donc $y'(s) = y''(s) = 0$ (somme nulle de deux réels positifs).
On en déduit que $y'(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et donc y est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
Or $y(0) = 0$ donc $\boxed{y = 0}$.

1.III. Unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\right)^n$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $(Y_{n-1}, \ldots, Y_0) \in \mathbb{C}^n$.
1.8. En s'inspirant de la partie précédente montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y &= b \\ (y^{(n-1)}(0), \ldots, y'(0), y(0)) &= (Y_{n-1}, \ldots, Y_1, Y_0). \end{aligned}$$

admet au plus une solution.

Par linéarité il suffit de traiter le cas où $b = 0$ et $Y_{n-1} = \ldots = Y_0 = 0$.
Soit y une fonction solution du problème de Cauchy homogène.
Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$u(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \left| y^{(k+1)}(s) \right| \mathrm{d}s.$$

$$m(t) = \max\left(|\alpha_0(t)|, |\alpha_1(t)| + 1, |\alpha_2(t)| + 1, \ldots, |\alpha_{n-1}(t)| + 1\right).$$

Alors m est continue (comme maximum de fonctions continues, par récurrence immédiate, et continuité de $|\cdot|$). De plus, par le TFA,

$$\forall t \geq 0, u'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| y^{(k+1)}(t) \right|.$$

Or pour $t \geq 0$, par l'équation différentielle et inégalité triangulaire,

$$\left| y^{(n)}(t) \right| + \left| y^{(n-1)}(t) \right| + \cdots + |y'(t)| \leq m(t)(|y^{(n-1)}(t)| + |y^{(n-2)}(t)| + \cdots + |y(t)|).$$

Et par TFA, inégalité triangulaire et conditions initiales, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}(t)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| y^{(k)}(0) + \int_0^t y^{(k+1)}(s)\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \left| y^{(k+1)}(s) \right| \mathrm{d}s \\ &= u(t). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $u'(t) \leq m(t)u(t)$.
Par lemme différentiel de Gronwall on a donc pour tout $t \geq 0$, $u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t m(s)\mathrm{d}s} = 0$.
Comme de plus (intégrale d'une valeur absolue sur $[0, t]$ avec $0 \leq t$) $u(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.
Donc $u = 0$.
On en déduit (intégrale nulle sur un segment d'une fonction positive continue) que $|y^{(n)}| + \ldots + |y'| = 0$ et donc (somme nulle de terme positifs) que $y^{(n)} = \ldots = y' = 0$.
En particulier y est constante et comme $y(0) = 0$ on en déduit que $\boxed{y = 0}$.