On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

1. Problème: Séries et homographies: les fractions continues

Étant donné une matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ on note

$$F_M = \frac{m_{11}X + m_{12}}{m_{21}X + m_{22}} \in \mathbb{R}(X).$$

On note aussi pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi_a = F_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}$, c'est à dire

$$\Phi_a(X) = \frac{1}{a + X}.$$

Pour $a_0, \dots, a_n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on note

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)} = \Phi_{a_0} \circ \cdots \circ \Phi_{a_n}$$

c'est à dire

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)}(X) = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + X}}}}.$$

On note pour $a_0, \dots, a_n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \Phi_{(a_0,\dots,a_n)}(0)$$

c'est à dire

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Enfin on dit que

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n \text{ converge}$$

ssi la suite

$$\left(\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Sinon on dit que $\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n$ diverge.
Dans le cas où $\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n$ converge, on note

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k.$$

1.I. Étude de la convergence

Dans cette partie on fixe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1.1. Soient $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$F_M \circ F_N = F_{MN}.$$

On définit les suites $(p_n)_{n\geq -1}$ et $(q_n)_{n\geq -1}$ par

$$\begin{aligned}(p_{-1}, q_{-1}) &= (1, 0)\\ (p_0, q_0) &= (0, 1)\end{aligned}$$

et pour tout $n \geq -1$,

$$\begin{aligned}p_{n+2} &= a_{n+1}p_{n+1} + p_n\\ q_{n+2} &= a_{n+1}q_{n+1} + q_n.\end{aligned}.$$

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_n & p_{n+1}\\ q_n & q_{n+1}\end{pmatrix}.$$

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\Phi_{(a_0,\ldots,a_n)} = \frac{p_nX + p_{n+1}}{q_nX + q_{n+1}}.$$

En déduire une expression de $\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k$ en fonction de p_{n+1} et de q_{n+1}.

1.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$$

et

$$q_{n+2}q_{n+1} \geq q_{n+1}q_n.$$

1.5. En déduire que

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff q_nq_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Indication: on rappelle l'existence du critère spécial des séries alternées.

1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n \leq \prod_{k=0}^{n-1}(1 + a_k).$$

1.7. En déduire que

$$\sum_n a_n \text{ converge } \Rightarrow \underset{n}{\mathrm{K}} a_n \text{ diverge.}$$

1.8. On suppose dans cette question et la suivante que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}q_{2m} &\geq 1 + \sum_{\substack{k\in[\![0,2m]\!]\\ k \text{ impair}}} a_k\\ q_{2m+1} &\geq \sum_{\substack{k\in[\![0,2m]\!]\\ k \text{ pair}}} a_k.\end{aligned}$$

1.9. En déduire que

$$\sum_n a_n \text{ diverge } \Rightarrow \underset{n}{\mathrm{K}} a_n \text{ converge.}$$

Dans tout le reste du sujet on considérera désormais des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ d'entiers non nuls.
Une récurrence montre (il n'est pas demandé de le redémontrer) que pour toute liste $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ différent de (1) (la liste contenant uniquement 1) et de () (la liste vide) on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \in]0,1[\cap\mathbb{Q}.$$

Par la partie 1.I comme $\sum_n a_n$ diverge grossièrement (il n'est pas demandé de le redémontrer) on a aussi pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$,

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \text{ converge.}$$

1.II. Existence par construction algorithmique, puis unicité

On appelle *algorithme de fraction continue* appliqué à $x \in]0,1[$ l'algorithme suivant:

- Initialisation
  On pose
  $$x_0 = x$$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, tant que $x_n \neq 0$
  On pose
  $$a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor$$
  et
  $$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - a_n.$$

Si la boucle «tant que» se termine on obtient alors une liste finie $(a_0, \dots, a_n)$ d'entiers.
Si la boucle «tant que» ne se termine pas, on obtient alors une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers.

1.10. Soit $x \in]0,1[$, montrer que les propriétés suivantes sont des invariants de boucles de l'algorithme:

$$\begin{aligned} &x_n \in]0,1[\\ &a_n \in \mathbb{N}^* \\ &x = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) \end{aligned}$$

1.11. Soit $x \in]0,1[$.
Montrer que **si** l'algorithme se termine **alors**, en notant $(a_0, \dots, a_n)$ la liste d'entiers obtenue, on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = x.$$

1.12. Soit $x \in]0,1[$.
Montrer que **si** l'algorithme ne se termine pas **alors**, en notant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers obtenue, on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = x.$$

1.13. Soit $x \in]0,1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.
Montrer que l'algorithme ne se termine pas.

1.14. Soit $x \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$.
Montrer que l'algorithme se termine.

1.15. Montrer que pour tous $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n \neq 1$, et $(b_0, \dots, b_m) \in (\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m \neq 1$ on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{m} b_k \quad\Rightarrow\quad n = m \text{ et } a_k = b_k \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!].$$

Indication: on pourra commencer par constater que sous ces conditions $\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \in \left]\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0}\right]$

1.16. Montrer que pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} b_k \quad \Rightarrow \quad a_n = b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.III. Bonus: Périodicité et irrationnels quadratiques

Attention: cette partie est beaucoup plus difficile que le reste du sujet et ne sera corrigée que si tout le reste du sujet a été traité convenablement.
On dit que $x \in]0,1[$ est un *irrationnel quadratique* ssi $x \notin \mathbb{Q}$ et qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg(P) = 2$ et $P(x) = 0$.
Dans la suite on fixe $x \in]0,1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite d'entiers strictement positifs telle que

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = x.$$

1.17. ★ Montrer que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est périodique ÀPCR} \quad \Rightarrow \quad x \text{ est un irrationnel quadratique.}$$

1.18. ★★ Montrer que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est périodique ÀPCR} \quad \Leftarrow \quad x \text{ est un irrationnel quadratique.}$$