En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

1. Problème: Séries et homographies: les fractions continues

Étant donné une matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ on note

$$F_M = \frac{m_{11}X + m_{12}}{m_{21}X + m_{22}} \in \mathbb{R}(X).$$

On note aussi pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi_a = F_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}$, c'est à dire

$$\Phi_a(X) = \frac{1}{a + X}.$$

Pour $a_0, \dots, a_n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on note

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)} = \Phi_{a_0} \circ \cdots \circ \Phi_{a_n}$$

c'est à dire

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)}(X) = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + X}}}}.$$

On note pour $a_0, \dots, a_n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \Phi_{(a_0,\dots,a_n)}(0)$$

c'est à dire

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Enfin on dit que

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n \text{ converge}$$

ssi la suite

$$\left(\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Sinon on dit que $\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n$ diverge.
Dans le cas où $\mathop{\mathrm{K}}_{n} a_n$ converge, on note

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k.$$

1.I. Étude de la convergence

Dans cette partie on fixe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1.1. Soient $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$F_M \circ F_N = F_{MN}.$$

Avec $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} F_M \circ F_N = \frac{m_{11}F_N + m_{12}}{m_{21}F_N + m_{22}} &= \frac{m_{11}\frac{n_{11}X+n_{12}}{n_{21}X+n_{22}} + m_{12}}{m_{21}\frac{n_{11}X+n_{12}}{n_{21}X+n_{22}} + m_{22}} \\ &= \frac{m_{11}(n_{11}X+n_{12}) + m_{12}(n_{21}X+n_{22})}{m_{21}(n_{11}X+n_{12}) + m_{22}(n_{21}X+n_{22})} \\ &= \frac{(m_{11}n_{11}+m_{12}n_{21})X + (m_{11}n_{12}+m_{12}n_{22})}{(m_{21}n_{11}+m_{22}n_{21})X + (m_{21}n_{12}+m_{22}n_{22})}. \end{aligned}$$

Et comme $MN = \begin{pmatrix} m_{11}n_{11}+m_{12}n_{21} & m_{11}n_{12}+m_{12}n_{22} \\ m_{21}n_{11}+m_{22}n_{21} & m_{21}n_{12}+m_{22}n_{22} \end{pmatrix}$ on a bien

$$\boxed{F_M \circ F_N = F_{MN}}.$$

On définit les suites $(p_n)_{n\geq -1}$ et $(q_n)_{n\geq -1}$ par

$$\begin{aligned} (p_{-1}, q_{-1}) &= (1, 0) \\ (p_0, q_0) &= (0, 1) \end{aligned}$$

et pour tout $n \geq -1$,

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= a_{n+1}p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} &= a_{n+1}q_{n+1} + q_n. \end{aligned}$$

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On procède par récurrence d'ordre sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$ on a comme $(p_0, q_0) = (0, 1)$ et $(p_1, q_1) = (a_0 \times 0 + 1, a_0 \times 1 + 0) = (1, a_0)$ on a bien
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix}.$$
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.
  Alors par hypothèse de récurrence on a
  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_n \times 0 + p_{n+1} \times 1 & p_n \times 1 + p_{n+1} \times a_{n+1} \\ q_n \times 0 + q_{n+1} \times 1 & q_n \times 1 + q_{n+1} \times a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_{n+2} \\ q_{n+1} & q_{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  d'où la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion**
  Par récurrence on a bien
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}}.$$

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\Phi_{(a_0,\ldots,a_n)} = \frac{p_nX + p_{n+1}}{q_nX + q_{n+1}}.$$

En déduire une expression de $\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k$ en fonction de p_{n+1} et de q_{n+1}.

Notons pour $a \in \mathbb{R}$, $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Par définition

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)} = F_{M_{a_0}} \circ F_{M_{a_1}} \circ \cdots \circ F_{M_{a_n}}$$

et par la question **1.1.** et une récurrence immédiate on en déduit que

$$\Phi_{(a_0,\dots,a_n)} = F_{M_{a_0}M_{a_1}\cdots M_{a_n}}.$$

Et par la question **1.2.** on a

$$M_{a_0}M_{a_1}\cdots M_{a_n} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$$

et donc en en déduit que

$$\boxed{\Phi_{(a_0,\dots,a_n)} = \frac{p_nX + p_{n+1}}{q_nX + q_{n+1}}}.$$

Et en particulier, en évaluant en 0,

$$\boxed{\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}.$$

1.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$$

et

$$q_{n+2}q_{n+1} \geq q_{n+1}q_n.$$

Comme d'après la question **1.2.** on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$$

en particulier, par passage au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{vmatrix}$$

c'est à dire

$$\boxed{p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}}.$$

De plus on a

$$q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + q_n$$

d'où

$$q_{n+2}q_{n+1} = a_{n+1}q_{n+1}^2 + q_nq_{n+1}$$

et comme $a_{n+1} \geq 0$, on a bien

$$\boxed{q_{n+2}q_{n+1} \geq q_{n+1}q_n}.$$

1.5. En déduire que

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff q_nq_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Indication: on rappelle l'existence du critère spécial des séries alternées.

Par la question **1.4.** la suite $(q_nq_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et positive, d'où la suite $\left(\frac{1}{q_nq_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question **1.4.** on a

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n+1}}.$$

Et la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série télescopique $\sum_n \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$.
Ainsi la nature de $\left(\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle de la série $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}$.

- Si $q_n q_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a $\left(\frac{1}{q_n q_{n+1}}\right)$ est une série décroissante tendant vers 0 et donc par le critère spécial des séries alternées on a

$$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \text{ converge.}$$

  Donc $\left(\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $\left(\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors

$$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \text{ converge.}$$

  Donc par critère de divergence groissière on a $\frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est à dire

$$q_n q_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

On a donc bien

$$\boxed{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff q_n q_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}.$$

1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n \leq \prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k).$$

On procède par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$.

► **Initialisation**
Pour $n = 0$ on a

$$q_0 = 1 = \prod_{k=0}^{-1}(1+a_k).$$

Pour $n = 1$ on a

$$q_1 = a_0 \leq 1 + a_0.$$

► **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n et $n+1$.
Alors par hypothèse de récurrence on a, comme $a_{n+1} \geq 0$

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= a_{n+1}q_{n+1} + q_n \\ &\leq a_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(1+a_k) + \prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k) \\ &\leq a_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(1+a_k) + (1+a_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k) \\ &= \prod_{k=0}^{n+1}(1+a_k). \end{aligned}$$

Conclusion
Par récurrence on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{q_n \leq \prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k)}.$$

1.7. En déduire que

$$\sum_n a_n \text{ converge } \Rightarrow \ \mathop{\mathrm{K}}_n a_n \text{ diverge.}$$

Supposons que $\sum_n a_n$ converge.
Alors en particulier $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'où

$$\ln(1+a_n) \sim a_n$$

et donc comparaison de séries à termes positifs on a donc

$$\sum_n \ln(1+a_n) \text{ converge}$$

et en particulier est bornée, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \ln(1+a_n) \leq C.$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)\right) \leq C$$

et donc par croissance de exp,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) \leq e^C.$$

Donc par la question précédente on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \leq e^C.$$

Et donc comme $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, on a $q_n q_{n+1}$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.
Donc par la question précédente $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
C'est à dire, comme pour tout n, $\frac{p_n}{q_n} = \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k$,

$$\boxed{\mathop{\mathrm{K}}_n a_n \text{ diverge}}.$$

1.8. On suppose dans cette question et la suivante que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$q_{2m} \geq 1 + \sum_{\substack{k\in[\![0,2m]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k$$

$$q_{2m+1} \geq \sum_{\substack{k\in[\![0,2m]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k.$$

Par récurrence immédiate on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + q_n \geq a_{n+1} + q_n.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$.
Par somme télescopique on a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q_{2m} &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \left(q_{2(k+1)} - q_{2k}\right) \\ &\geq 1 + \sum_{k=0}^{m-1} a_{2k+1} \end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\boxed{q_{2m} \geq 1 + \sum_{\substack{k \in [\![0,2m]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k}.$$

De même

$$\begin{aligned} q_{2m+1} &= q_1 + \sum_{k=0}^{m-1} \left(q_{2(k+1)+1} - q_{2k+1}\right) \\ &\geq a_0 + \sum_{k=0}^{m-1} a_{2k+2} \end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\boxed{q_{2m+1} \geq \sum_{\substack{k \in [\![0,2m]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k}.$$

1.9. En déduire que

$$\sum_n a_n \text{ diverge } \Rightarrow \mathop{\mathrm{K}}_n a_n \text{ converge.}$$

Supposons que $\sum_n a_n$ diverge.
Alors

$$\left(\sum_{\substack{k \in [\![0,2m]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k + \sum_{\substack{k \in [\![0,2m]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

et donc par la question précédente on a, par encadrement,

$$q_{2m} + q_{2m+1} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty,$$

c'est à dire

$$q_n + q_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq 1$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2q_n q_{n+1} \geq q_n + q_{n+1}.$$

Et donc par encadrement

$$q_n q_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Par la question **1.5.** on en déduit que

$$\boxed{\mathop{\mathrm{K}}_n a_n \text{ converge}}.$$

Dans tout le reste du sujet on considérera désormais des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ d'entiers non nuls.
Une récurrence montre (il n'est pas demandé de le redémontrer) que pour toute liste $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ différent de (1) (la liste contenant uniquement 1) et de () (la liste vide) on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \in]0,1[\cap \mathbb{Q}.$$

Par la partie 1.I comme $\sum_n a_n$ diverge grossièrement (il n'est pas demandé de le redémontrer) on a aussi pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$,

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \text{ converge.}$$

1.II. Existence par construction algorithmique, puis unicité

On appelle *algorithme de fraction continue* appliqué à $x \in]0,1[$ l'algorithme suivant:

- Initialisation
  On pose
  $$x_0 = x$$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, tant que $x_n \neq 0$
  On pose
  $$a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor$$
  et
  $$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - a_n.$$

Si la boucle «tant que» se termine on obtient alors une liste finie $(a_0, \dots, a_n)$ d'entiers.
Si la boucle «tant que» ne se termine pas, on obtient alors une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers.

1.10. Soit $x \in]0,1[$, montrer que les propriétés suivantes sont des invariants de boucles de l'algorithme:

$$\begin{aligned} &x_n \in]0,1[\\ &a_n \in \mathbb{N}^* \\ &x = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) \end{aligned}$$

On remarque que si $x_n \in\in)0,1[$ alors (croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) on a $\frac{1}{x_n} > 1$ d'où $a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \in \mathbb{N}^*$.
Il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned} &x_n \in]0,1[\\ &x = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) \end{aligned}$$

sont initialisées et héréditaires.

▶ **Initialisation**
On a bien $x_0 = x \in]0,1[$.
Et on a bien, comme l'élément neutre d'une composée est l'identité,

$$x = \phi_{()}(x_0).$$

Si la zérologie précédente vous pose problème, on peut sinon le vérifier au rang suivant:

$$x_1 = \frac{1}{x_0} - a_0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{x_0} = x_1 + a_0$$

ou encore (les termes sont non nuls)

$$x_0 = \frac{1}{x_1 + a_0}.$$

On a donc bien

$$x = \phi_{(a_0)}(x_1).$$

▶ **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$.
Supposons $x_n \in]0,1[$ et $x = \phi_{(a_0,\dots,a_n)}(x_{n+1})$.
Alors

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor$$

vérifie par définition de la partie entière

$$\frac{1}{x_n} - 1 < a_n \leq \frac{1}{x_n}$$

c'est à dire

$$-\frac{1}{x_n} \leq -a_n < 1 - \frac{1}{x_n}$$

et donc

$$0 \leq \frac{1}{x_n} - a_n < 1$$

c'est à dire

$$0 \leq x_{n+1} < 1.$$

De plus on a

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - a_n$$

c'est à dire (les termes sont non nuls)

$$x_n = \frac{1}{x_{n+1} + a_n}$$

ou encore

$$x_n = \phi_{a_n}(x_{n+1}).$$

En particulier, on a

$$\phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(\phi_{a_n}(x_{n+1}))$$

c'est à dire

$$\phi_{(a_0,\dots,a_{n-1},a_n)}(x_{n+1}) = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n).$$

Or, par hypothèse de récurrence on a

$$\phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) = x.$$

Donc on a bien

$$\phi_{(a_0,\dots,a_n)}(x_{n+1}) = x.$$

► **Conclusion**
On a donc bien, comme invariant de boucle

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n \in]0,1[\\ a_n \in \mathbb{N}^* \\ x = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) \end{array}}.$$

1.11. Soit $x \in]0,1[$.
Montrer que **si** l'algorithme se termine **alors**, en notant $(a_0, \dots, a_n)$ la liste d'entiers obtenue, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = x.$$

Comme la propriété,

$$x = \phi_{(a_0,\dots,a_{k-1})}(x_k)$$

est un invariant de boucle (initialisée et héréditaire) on a en particulier, après la sortie de la boucle,

$$x = \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(0)$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = x}.$$

1.12. Soit $x \in]0,1[$.
Montrer que **si** l'algorithme ne se termine pas **alors**, en notant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers obtenue, on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = x.$$

Supposons que l'algorithme ne se termine pas.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a alors par l'invariant de boucle de la question **1.10.** et l'expression de la question, **1.3.**

$$\begin{aligned} x &= \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(x_n) \\ &= \frac{p_{n-1}x_n + p_n}{q_{n-1}x_n + q_n} \end{aligned}$$

or on a aussi

$$\begin{aligned} \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k &= \phi_{(a_0,\dots,a_{n-1})}(0) \\ &= \frac{p_n \times 0 + p_{n+1}}{q_n \times 0 + q_{n+1}} \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la question **1.4.**, on a

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n-1}x_n + p_n}{q_{n-1}x_n + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{p_{n-1}q_nx_n + p_nq_n - p_nq_{n-1}x_n - p_nq_n}{(q_{n-1}x_n + q_n)q_n} \\ &= \frac{(-1)^n x_n}{(q_{n-1}x_n + q_n)q_n} \end{aligned}$$

Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a vu à la partie 1.I que $(q_{n-1}x_n+q_n)q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
On en conclut que

$$x - \frac{p_n}{q_n} \to n \to +\infty 0$$

c'est à dire d'après la partie 1.I que

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{\infty} a_k = x.$$

1.13. Soit $x \in]0,1[\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
Montrer que l'algorithme ne se termine pas.

Comme l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel, par contraposée l'inverse d'un irrationnel est un irrationnel.
De plus comme la différence d'un rationnel et d'un rationnel est un rationnel, par contraposée la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
Soit $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
Alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, d'où $\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
En posant

$$\begin{aligned} f : \quad (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) &\to \overline{\mathbb{Q}} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{aligned}$$

on obtient alors que f est bien défine.
D'où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} &= f(x_n) \end{aligned}$$

est bien définie.
Mais il s'agit exactement de la suite de l'algorithme de fraction continue appliqué à x, et en particulier il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$.
Donc l'algorithme ne se termine pas.

1.14. Soit $x \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$.
Montrer que l'algorithme se termine.

Par récurrence immédiate, on a pour tout k tel que x_k est bien défini, $x_k \in \mathbb{Q}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$, notons

$$x_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

où $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\alpha_n \wedge \beta_n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$.
On a alors, en notant // l'opérateur de quotient de la division euclidienne et % l'opérateur de reste,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_n} &= \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ &= \frac{(\beta // \alpha_n)\alpha_n + (\beta_n \% \alpha_n)}{\alpha_n} \\ &= \underbrace{\beta_n // \alpha_n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{\beta_n \% \alpha_n}{\alpha_n}}_{\in [0,1[}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$x_n = \frac{1}{x_n} - \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor = \frac{\beta_n \% \alpha_n}{\alpha_n}.$$

Et comme $\alpha_n \wedge \beta_n = 1$, on a $\beta_n \% \alpha_n \wedge \alpha_n = 1$.
Ainsi

$$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = (\beta_n \% \alpha_n, \alpha_n)$$

et en particulier $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite strictement décroissante d'entiers naturels c'est à dire un invariant de boucle.
Donc l'algorithme se termine.
Remarque: on remarque qu'il s'agit tout simplement de l'algorithme d'Euclide pour la division euclidienne.

1.15. Montrer que pour tous $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n \neq 1$, et $(b_0, \ldots, b_m) \in (\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m \neq 1$ on a

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{m} b_k \quad \Rightarrow \quad n = m \text{ et } a_k = b_k \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!].$$

Indication: on pourra commencer par constater que sous ces conditions $\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \in \left]\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0}\right]$

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n \neq 1$.
On constate que comme

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} a_k}$$

et que, car $a_n \neq 1$,

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} a_k \in]0,1[$$

en particulier on a (stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\mathop{\mathrm{K}}_{k=0}^{n} a_k \in \left]\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0}\right].$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition

«pour tout $(a_0,\dots,a_n)\in(\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n\neq 1$, pour tout $m\in\mathbb{N}$, pour tout $(b_0,\dots,b_m)\in(\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m\neq 1$, **si** $\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=0}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k$ **alors** $n=m$ et $a_k=b_k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$»

- **Initialisation**
  Soit $a_0\geq 2$ et $(b_0,\dots,b_m)\in(\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m\neq 1$ vérifiant
  $$\frac{1}{a_0} = \underset{k=0}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k.$$
  Par la constatation précédente on a en particulier
  $$\frac{1}{a_0}\in\left]\frac{1}{b_0+1},\frac{1}{b_0}\right].$$
  Or l'ensemble des $\left(\left]\frac{1}{b_0+1},\frac{1}{b_0}\right]\right)_{b\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de $]0,1]$, d'où on déduit que
  $$\frac{1}{a_0}=\frac{1}{b_0}$$
  Et comme on a donc
  $$\frac{1}{a_0} = \frac{1}{a_0+\underset{k=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} a_k}$$
  c'est à dire
  $$\underset{k=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} a_k = 0$$
  c'est à dire $m=0$.
- **Hérédité**
  Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rang $n-1$.
  Soient $(a_0,\dots,a_n)\in(\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n\neq 1$ et $(b_0,\dots,b_m)\in(\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m\neq 1$ vérifiant
  $$\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=0}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k.$$
  On a alors la valeur commune est dans $\left]\frac{1}{a_0+1},\frac{1}{a_0}\right]$ ainsi que dans $\left]\frac{1}{b_0+1},\frac{1}{b_0}\right]$.
  Or les ensembles des $\left(\left]\frac{1}{b+1},\frac{1}{b}\right]\right)_{b\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de $]0,1]$.
  Par conséquent $a_0=b_0$, et de
  $$\frac{1}{a_0+\underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k} = \frac{1}{b_0+\underset{k=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k}$$
  on déduit
  $$\underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k.$$
  Par $\mathcal{P}_{n-1}$ on a donc $n=m$ et $a_k=b_k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
- **Conclusion**
  Par récurrence on a donc bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $(a_0,\dots,a_n)\in(\mathbb{N}^*)^{n+1}$ tel que $a_n\neq 1$, et pour tout $(b_0,\dots,b_m)\in(\mathbb{N}^*)^{m+1}$ tel que $b_m\neq 1$,
  $$\boxed{\underset{k=0}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=0}{\overset{m}{\mathrm{K}}} b_k \quad\Rightarrow\quad n=m \text{ et } a_k=b_k \text{ pour tout } k\in[\![0,n]\!].}$$

1.16. Montrer que pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ on a
$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} b_k \quad\Rightarrow\quad a_n=b_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tels que $\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} b_k$.
On a

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k = \frac{1}{a_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k}$$

et

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k \in]0,1[$$

par conséquent

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k \in \left]\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0}\right[.$$

De même

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} b_k \in \left]\frac{1}{b_0+1}, \frac{1}{b_0}\right[.$$

Or les ensembles de la forme $]\frac{1}{b+1}, \frac{1}{b}[$ sont deux à deux disjoints.
Par conséquence $a_0 = b_0$.
On en déduit

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k = \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} b_k.$$

Par récurrence, de même qu'à la question **1.15.** on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n}.$$

1.III. Bonus: Périodicité et irrationnels quadratiques

<u>Attention:</u> cette partie est beaucoup plus difficile que le reste du sujet et ne sera corrigée que si tout le reste du sujet a été traité convenablement.
On dit que $x \in]0,1[$ est un *irrationnel quadratique* ssi $x \notin \mathbb{Q}$ et qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg(P) = 2$ et $P(x) = 0$.
Dans la suite on fixe $x \in]0,1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite d'entiers strictement positifs telle que

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k = x.$$

1.17. ★ Montrer que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est périodique ÀPCR} \quad \Rightarrow \quad x \text{ est un irrationnel quadratique.}$$

1.18. ★★ Montrer que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est périodique ÀPCR} \quad \Leftarrow \quad x \text{ est un irrationnel quadratique.}$$