Formules de Cardan

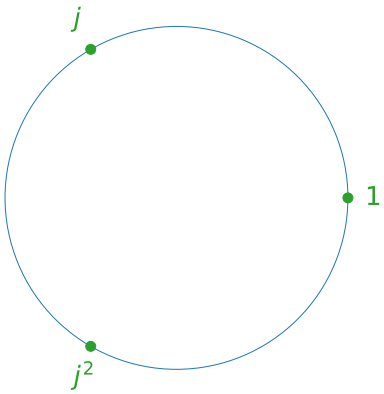
On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème propose d'étudier la résolution des équations polynômiales de degré 3.
On utilise une méthode de réduction de degré reposant sur les racines 3-ièmes de l'unité pour ramener la résolution d'un tel polynôme à la résolution d'un polynôme du second degré.

Remarque: S'il existe une méthode pour se ramener d'une équation de degré 4 à une équation de degré 3 (méthode de Ferrari), on peut (cf. théorie de Galois) montrer qu'il est impossible de «résoudre par radicaux» les équations de degré 5 ou plus.



1. Formules de Cardan

Étant donné $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$ on admet qu'il existe des complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3).$$

Résoudre l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) revient donc à déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Dans tout le sujet on notera

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}}.$$

1.I. Préliminaires sur j

1.1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$z^3 = 1$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.2. Soit $w \in \mathbb{C}$. Déterminer selon la valeur de w le nombre de solutions de l'équation

$$z^3 = w$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.3. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3).$$

Exprimer
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$,
- $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

en fonction de (a,b,c,d).

1.4. Déterminer $1 + j + j^2$.

1.5. Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.
Déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = y_2 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = y_3 \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$.

1.6. Soient α, β deux nombres complexes.
Montrer que

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+j\beta)(\alpha+j^2\beta).$$

1.II. Forme canonique

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$.

1.7. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a\left((X-\alpha)^3 + p(X-\alpha) + q\right).$$

1.8. Commenter.

Dans tout la suite on fixe p, q deux nombres complexes et on cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + pz + q = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les nombres complexes tels que

$$X^3 + pX + q = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3).$$

1.III. Réduction du degré par méthode de Laplace

On pose

$$u = \lambda_1 + j\lambda_2 + j^2\lambda_3$$
$$v = \lambda_1 + j^2\lambda_2 + j\lambda_3.$$

1.9. Exprimer λ_1,λ_2 et λ_3 en fonction de u et v.
1.10. Exprimer uv en fonction de p.
1.11. Exprimer $u^3 + v^3$ en fonction de q.
1.12. En déduire que u^3 et v^3 sont les racines du trinôme du second degré

$$X^2 + 27qX - 27p^3.$$

1.13. 💬 Proposer une méthode permettant de déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Remarque: il n'est pas demandé de calculer explicitement les solutions, mais juste de décrire une suite d'opérations permettant de le faire.

On notera dans la suite

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2$$

appelé discriminant du polynôme

$$X^3 + pX + q.$$

1.IV. Application: le cas réel

Attention: cette partie nécessite plus de calculs que les parties précédentes.

On suppose dans cette sous-partie que $p, q \in \mathbb{R}^2$.
On cherche à résoudre l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
On réutilise les notations des questions précédentes.
1.14. Montrer que si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet trois solutions complexes distinctes.
1.15. Montrer que

- si $\Delta > 0$, alors l'équation admet trois solutions réelles distinctes,
- si $\Delta < 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle et deux solutions complexes non réelles et conjuguées.