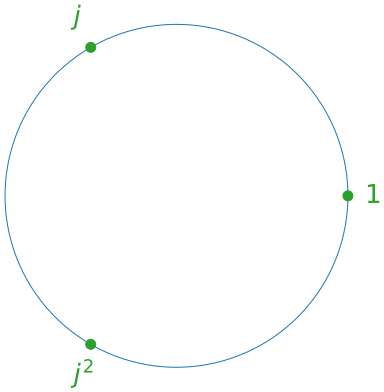
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème propose d'étudier la résolution des équations polynômiales de degré 3.
On utilise une méthode de réduction de degré reposant sur les racines 3-ièmes de l'unité pour ramener la résolution d'un tel polynôme à la résolution d'un polynôme du second degré.
Remarque: S'il existe une méthode pour se ramener d'une équation de degré 4 à une équation de degré 3 (méthode de Ferrari), on peut (cf. théorie de Galois) montrer qu'il est impossible de «résoudre par radicaux» les équations de degré 5 ou plus.



---

1. Formules de Cardan

Étant donné $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$ on admet qu'il existe des complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3).$$

Résoudre l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) revient donc à déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Dans tout le sujet on notera

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}}.$$

1.I. Préliminaires sur j

1.1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$z^3 = 1$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On a $0^3 = 0 \neq 1$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Avec $z = re^{i\theta}$, $r \in]0,+\infty[$, $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$z^3 = 1$$

ssi

$$r^3 e^{i3\theta} = 1e^{i0}$$

c'est à dire (égalité de deux formes exponentielles) ssi

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases}$$

ce qui équivaut à (comme $r > 0$)

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Comme θ est défini modulo 2π on en déduit que l'ensemble des solutions est $\left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$ ce qui se réécrit aussi

$$\boxed{\{1, j, j^2\}}.$$

Remarque: c'est un cas particulier de racines n-ièmes de l'unité. On verra que pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des solutions de

$$z^n = 1$$

est

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

1.2. Soit $w \in \mathbb{C}$. Déterminer selon la valeur de w le nombre de solutions de l'équation

$$z^3 = w$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- Si $w = 0$ alors il existe une seule solution (triple) qui est 0.
- Si $w \neq 0$ avec $w = \rho e^{i\phi}$, $\rho \in]0, +\infty[$, $\phi \in \mathbb{R}$ le même calcul qu'à la question précédente montre que 0 n'est pas solution et que $z = re^{i\theta}$, $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in \mathbb{R}$ est solution ssi

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ \theta \equiv \dfrac{\phi}{3} \left[\dfrac{2\pi}{3} \right] \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions (un angle étant défini modulo 2π) est

$$\left\{ \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\phi}{3}}, \sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

et il y a donc 3 solutions distinctes.

On remarque par ailleurs qu'avec ξ une solution particulière l'ensemble des solutions est $\{\xi, j\xi, j^2\xi\}$.

Remarque: De manière générale pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $z^n = w$ admet une unique solution pour $w = 0$ et n solutions distinctes pour $w \neq 0$.

Dans ce dernier cas avec ξ une solution particulière l'ensemble des solutions est $\{\xi\omega, \omega \in \mathbb{U}_n\}$.

1.3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

Exprimer
▷ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
▷ $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$,
▷ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,
en fonction de (a, b, c, d).

En développant on obtient

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) = X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

et donc (deux polynômes étant égaux ssi leurs coefficients sont égaux) on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{b}{a} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 &= \frac{c}{a} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}}$$

Remarque: Il s'agit d'un cas particulier des relations coefficients/racines d'un polynôme que l'on verra plus tard.

1.4. Déterminer $1 + j + j^2$.

Par somme géométrique comme $j \neq 1$,

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j}$$

et comme $j^3 = 1$ on en déduit

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0}.$$

Remarque: De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0.$$

[Faire un schéma]

1.5. Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.
Déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = y_2 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = y_3 \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$.

La façon la plus efficace est de procéder par opérations élémentaires sur les lignes, ce qui permet de conclure directement.
En attendant de voir cette méthode on peut procéder par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 & (L_1) \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = y_2 & (L_2) \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = y_3 & (L_3) \end{cases}$$

  Alors,
  ▷ En effectuant la somme $L_1 + L_2 + L_3$ on obtient

$$(1+1+1)x_1 + (1+j+j^2)x_2 + (1+j^2+j)x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

  c'est à dire

$$3x_1 = y_1 + y_2 + y_3.$$

  ▷ En effectuant la somme $L_1 + j^2L_2 + jL_3$ on obtient (comme $j^3 = 1$)

$$(1+j^2+j)x_1 + (1+1+1)x_2 + (1+j+j^2)x_3 = y_1 + j^2y_2 + jy_3$$

  c'est à dire

$$3x_2 = y_1 + j^2y_2 + jy_3.$$

  ▷ En effectuant la somme $L_1 + jL_2 + j^2L_3$ on obtient (comme $j^3 = 1$)

$$(1+j+j^2)x_1 + (1+j+j^2)x_2 + (1+1+1)x_3 = y_1 + jy_2 + j^2y_3$$

  c'est à dire

$$3x_3 = y_1 + jy_2 + j^2y_3.$$

- **Synthèse**
  On a

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} + \frac{y_1+j^2y_2+jy_3}{3} + \frac{y_1+jy_2+j^2y_3}{3} = \frac{1+1+1}{3}y_1 + \frac{1+j^2+j}{3}y_2 + \frac{1+j+j^2}{3}y_3 \quad = y_1$$

  et de même (comme $j^3 = 1$)

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} + j\frac{y_1+j^2y_2+jy_3}{3} + j^2\frac{y_1+jy_2+j^2y_3}{3} = \frac{1+j+j^2}{3}y_1 + \frac{1+1+1}{3}y_2 + \frac{1+j^2+j}{3}y_3 \quad = y_2$$

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} + j^2\frac{y_1+j^2y_2+jy_3}{3} + j\frac{y_1+jy_2+j^2y_3}{3} = \frac{1+j^2+j}{3}y_1 + \frac{1+j+j^2}{3}y_2 + \frac{1+1+1}{3}y_3 \quad = y_3$$

On conclut qu'il existe une et unique solution,

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{y_1+j^2y_2+jy_3}{3} \\ x_3 = \dfrac{y_1+jy_2+j^2y_3}{3} \end{cases}}$$

Remarque: le système linéaire est un cas particulier de système de Vandermonde, dans le cas particulier de racines de l'unité.

Par exemple pour $n = 2$ on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$$

de solution

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2} \end{cases}$$

1.6. Soient α, β deux nombres complexes.
Montrer que

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta).$$

Il y a au moins deux méthodes.

- En développant, et comme $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta) &= \alpha^3 + (1 + j + j^2)\alpha^2\beta + (j^3 + j^2 + j)\alpha\beta^2 + j^3\beta^3 \\ &= \alpha^3 + \beta^3.\end{aligned}$$

- En factorisant.
  On constate tout d'abord que

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2).$$

  ▷ Si $\beta = 0$ alors la formule est vérifiée.
  ▷ Si $\beta \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (-\beta)^3 \left(\left(\frac{\alpha}{-\beta} \right)^3 - 1 \right) \\ &= (-\beta)^3 \left(\left(\frac{\alpha}{-\beta} \right) - 1 \right) \left(\left(\frac{\alpha}{-\beta} \right) - j \right) \left(\left(\frac{\alpha}{-\beta} \right) - j^2 \right) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta)\end{aligned}$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta)}.$$

Remarque: de manière générale pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a de même

$$\alpha^n - (-\beta)^n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\alpha + \omega\beta).$$

Ainsi pour $n = 2$, on obtient

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

1.II. Forme canonique

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$.
1.7. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a\left((X - \alpha)^3 + p(X - \alpha) + q\right).$$

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ qui conviennent.
  Comme

$$\begin{aligned}(X - \alpha)^3 + p(X - \alpha) + q &= X^3 - 3\alpha X^2 + 3\alpha^2 X - \alpha^3 + pX - p\alpha + q \\ &= X^3 - 3\alpha X^2 + (3\alpha^2 + p)X + (-\alpha^3 - p\alpha + q)\end{aligned}$$

  on en déduit

$$\begin{cases} -3\alpha = \dfrac{b}{a} \\ 3\alpha^2 + p = \dfrac{c}{a} \\ -\alpha^3 - p\alpha + q = \dfrac{d}{a} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{3a} \\ p = \dfrac{c}{a} - 3\alpha^2 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2} = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q = \dfrac{d}{a} + \alpha^3 + p\alpha = \dfrac{d}{a} - \dfrac{b^3}{27a^3} - \dfrac{b}{3a} \times \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} = \dfrac{27da^2 - 9abc + 2b^3}{27a^3} \end{cases}$$

- **Synthèse**
  En posant

$$\boxed{\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{3a} \\ p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q = \dfrac{27da^2 - 9abc + 2b^3}{27a^3} \end{cases}}$$

et en développant on obtient bien

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a\left((X-\alpha)^3 + p(X-\alpha) + q\right).$$

1.8. Commenter.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines de

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, comme $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} az^3 + bz^2 + cz + d = 0 &\Leftrightarrow a\left((z-\alpha)^3 + p(z-\alpha) + q\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z-\alpha) \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{\alpha + \lambda_1, \alpha + \lambda_2, \alpha + \lambda_3\} \end{aligned}.$$

Par conséquent pour résoudre les équations de degré 3 il suffit de savoir de résoudre les équations sous «forme canonique»

$$x^3 + px + q = 0.$$

Dans tout la suite on fixe p, q deux nombres complexes et on cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + pz + q = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les nombres complexes tels que

$$X^3 + pX + q = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

1.III. Réduction du degré par méthode de Laplace

On pose

$$u = \lambda_1 + j\lambda_2 + j^2\lambda_3$$
$$v = \lambda_1 + j^2\lambda_2 + j\lambda_3.$$

1.9. Exprimer λ_1,λ_2 et λ_3 en fonction de u et v.

On a par la question **1.3.**

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

et comme de plus

$$\lambda_1 + j\lambda_2 + j^2\lambda_3 = u$$
$$\lambda_1 + j^2\lambda_2 + j\lambda_3 = v$$

on en déduit par la question **1.5.**

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{u+v}{3}\\ \lambda_2 &= \frac{j^2u+jv}{3}\\ \lambda_3 &= \frac{ju+j^2v}{3}\end{aligned}}$$

1.10. Exprimer uv en fonction de p.

On a

$$\begin{aligned}uv &= (\lambda_1 + j\lambda_2 + j^2\lambda_3)(\lambda_1 + j^2\lambda_2 + j\lambda_3)\\ &= (\lambda_1^2 + j^2\lambda_1\lambda_2 + j\lambda_1\lambda_3) + (j\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2^2 + j^2\lambda_2\lambda_3) + (j^2\lambda_3\lambda_1 + j\lambda_3\lambda_2 + \lambda_3^2)\\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\end{aligned}$$

et par la question **1.3.**, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = p$, d'où on en déduit donc que

$$\boxed{uv = -3p}.$$

1.11. Exprimer $u^3 + v^3$ en fonction de q.

D'après la question **1.6.**,la question **1.9.** et $j^3 = 1$ on a

$$\begin{aligned}u^3 + v^3 &= (u+v)(u+jv)(u+j^2v)\\ &= 27j^3\frac{u+v}{3}\frac{ju+j^2v}{3j}\frac{j^2u+j^4v}{3j^2}\\ &= 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

Par la question **1.3.**, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -q$ et donc

$$\boxed{u^3 + v^3 = -27q}.$$

1.12. En déduire que u^3 et v^3 sont les racines du trinôme du second degré

$$X^2 + 27qX - 27p^3.$$

Par la question **1.10.** on a

$$u^3 \times v^3 = -27p^3$$

et par la question **1.11.**

$$u^3 + v^3 = -27q.$$

Par conséquent, par les relations coefficients-racines des trinômes du second degré on a bien u^3 et v^3 sont les racines du trinôme du second degré

$$\boxed{X^2 + 27qX - 27p^3}.$$

1.13. 💬 Proposer une méthode permettant de déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Remarque: il n'est pas demandé de calculer explicitement les solutions, mais juste de décrire une suite d'opérations permettant de le faire.

On peut par exemple procéder par analyse synthèse.
L'analyse est la suivante:
▷ On détermine le discriminant du trinôme $X^2 + 27qX - 27p^3$ est

$$(27q)^2 + 4 \times 27p^3 = -27(-4p^3 - 27q^2).$$

▷ À l'aide de ce discriminant on détermine les racines de $X^2+27qX-27p^3$ et donc, par la question **1.12.**, les valeurs de u^3 et v^3.
▷ À l'aide de la question **1.2.** on en déduit u et v.
▷ Par la question **1.9.** on en déduit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.
Pour la synthèse on peut alors vérifier que les nombres obtenus conviennent.
Remarques:

- Un point peut sembler mystérieux dans le raisonnement par analyse-synthèse.
  En effet deux **choix arbitraires** ont été effectués, tout d'abord en choisissant u^3 et v^3 parmi les deux racines du trinôme (deux possibilités), puis pour passer de (u^3,v^3) à (u,v) en choisissant des racines 3-ième (3 possibilités pour chaque). Il y aurait en effet a priori $2\times3\times3$ possibilités. En fait la contrainte $uv=-3p$ réduit le choix simultané des racines 3-ièmes à 3 possibilités pour passer de (u^3,v^3) à (u,v).
  Et on peut ensuite vérifier que les 6 choix possibles engendrent en fait les 6 permutations possibles parmi les racines. Le choix arbitraire précédent correspond donc, en fait, à choisir un ordre arbitraire parmi les racines. Et par conséquent, il n'importe pas pour l'obtention de l'ensemble des racines.
- De plus, la méthode précédente permet d'obtenir une expression explicite (à condition d'extraire des racines 3-ièmes) des racines en fonction des coefficients.
  Par exemple, dans le cas réel cf sous-parties 1.IV, où $\Delta<0$, l'extraction de racine cubique peut se faire à l'aide de la racine cubique réelle et on obtient comme unique solution réelle

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{-27q+\sqrt{27}\sqrt{27q^2+4p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-27q-\sqrt{27}\sqrt{27q^2+4p^3}}{2}}\right),$$

ce qui peut se réécrire

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},$$

et comme racines complexes (conjuguées)

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right)\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right).$$

Ces formules sont parfois appelées *formules de Cardan.*

On notera dans la suite

$$\Delta=-4p^3-27q^2$$

appelé discriminant du polynôme

$$X^3+pX+q.$$

On remarque qu'à un facteur -27 près il s'agit du discriminant du trinôme $X^2+27qX-27p^3$.

1.IV. Application: le cas réel

Attention: cette partie nécessite plus de calculs que les parties précédentes.

On suppose dans cette sous-partie que $p,q\in\mathbb{R}^2$.
On cherche à résoudre l'équation

$$x^3+px+q=0$$

d'inconnue $x\in\mathbb{C}$.
On réutilise les notations des questions précédentes.
1.14. Montrer que si $\Delta\neq0$, alors l'équation admet trois solutions complexes distinctes.

Procédons tout d'abord à la synthèse de l'analyse-synthèse précédente.
On observe que le trinôme $X^2+27qX-27p^3$ a pour discriminant -27Δ.
Si $\Delta\neq0$, alors ce trinôme admet deux racines distinctes (réelles ou complexes) que l'on note δ_+ et δ_-.
Une des racines étant non nulle, quitte à les intervertir on peut sans perte de généralité supposer que $\delta_+\neq0$.
Avec $\delta_+=r_+e^{i\theta_+}$,($r_+>0$, $\theta_+\in\mathbb{R}$) on pose par exemple, $u=\sqrt[3]{r_+}e^{i\frac{\theta_+}{3}}$ et $v=-3p/u$.
On a alors en particulier $u^3v^3=(-3p)^3$, et donc comme $u^3=\delta_+\neq0$ et que $\delta_+\delta_-=-27p^3$, on en déduit que $v^3=\delta_-$.
Donc $u^3+v^3=-27q$.
Et le caractère distinct des racines du trinôme implique que

$$u^3 \neq v^3.$$

On conclut donc

$$\begin{cases} uv = -3p \\ u^3 + v^3 = -27q \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \frac{u+v}{3} \\ \lambda_2 &= \frac{ju+j^2v}{3} \\ \lambda_3 &= \frac{j^2u+jv}{3} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à développer.
Comme par la question **1.6.**

$$(u+v)(ju+j^2v)(j^2u+jv) = j^3(u+v)(u+jv)(u+j^2v) = u^3+v^3$$

et

$$(u+v)(ju+j^2v)+(ju+j^2v)(j^2u+jv)+(j^2u+jv)(u+v) = (1+j+j^2)u^2+(1+j+j^2)v^2+3(j+j^2)uv = -3uv,$$

ainsi que

$$(u+v)+(ju+j^2v)+(j^2u+jv) = (1+j+j^2)u+(1+j+j^2)v = 0$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) &= X^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)X-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= X^3-0X^2+\frac{(-3)\times(-3p)}{3^2}X-\frac{-27q}{3^3} \\ &= X^3+pX+q.\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions complexes est } \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}}$.
De plus si par exemple $\lambda_1=\lambda_2$ alors $u+v=ju+j^2v$ d'où $\frac{v}{u}=\frac{1-j}{j^2-1}=j$ ce qui contredit $\frac{u^3}{v^3}\neq 1$. Et de même dans les autres cas.
Par conséquent les $\boxed{\text{solutions précédentes sont deux à deux distinctes.}}$

1.15. Montrer que
- si $\Delta>0$, alors l'équation admet trois solutions réelles distinctes,
- si $\Delta<0$, alors l'équation admet une unique solution réelle et deux solutions complexes non réelles et conjuguées.

- Si $\Delta<0$ alors δ_+ et δ_- (les deux racines de $X^2+27qX-27p^3$) sont réelles distinctes (car c'est un trinôme réel de discriminant $-27\Delta>0$).
  En posant $u=\sqrt[3]{\delta_+}$ on a donc $u\in\mathbb{R}$, et comme $p\in\mathbb{R}$ on a aussi $v\in\mathbb{R}$.
  Par conséquent, comme u et v réels on a
  ▷ $\mathrm{Im}(u+v)=0$,
  ▷ $\mathrm{Im}(ju+j^2v)=\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\neq 0$,
  ▷ $\mathrm{Im}(j^2u+jv)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\neq 0$
  d'où $\frac{u+v}{3}\in\mathbb{R}$, ainsi que $\frac{ju+j^2v}{3}\notin\mathbb{R}$ et $\frac{j^2u+jv}{3}\notin\mathbb{R}$.
  Donc $\boxed{\text{si } \Delta<0 \text{ l'équation admet une unique solution réelle ainsi que deux solutions complexes}}$ non réelles et de plus comme $\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(v-u)$ les solutions non réelles sont $\boxed{\text{conjuguées.}}$
  Remarque De plus si $z\in\mathbb{C}$ est solution on a

  $$z^3+pz+q=0$$

  d'où

  $$\overline{z}^3+\overline{p}\overline{z}+\overline{q}=\overline{0}$$

  c'est à dire comme $p,q\in\mathbb{R}$,

  $$\overline{z}^3+p\overline{z}+q=0$$

  i.e $\overline{z}$ est solution.
  On a donc montré, sans les calculer que les solutions complexes d'une équation polynomiale réelle sont conjuguées.
- Si $\Delta>0$ alors δ_+ et δ_- (les deux racines de $X^2+27qX-27p^3$) sont complexes conjuguées (car c'est un trinôme réel de discriminant $-27\Delta<0$). Avec u une racine 3-ième de δ_+ et $v=-3p/u$. Comme $u^3=\overline{v^3}$, on a $|u|=|v|$; et

de plus, comme $-27p^3 > 0$, on a $uv = -3p > 0$, d'où on déduit que $v = \overline{u}$.
Par conséquent $\frac{u+v}{3} \in \mathbb{R}$, et comme

$$\overline{ju} = \overline{j}v = j^2 v \qquad \text{et} \qquad \overline{j^2 u} = \overline{j^2} v = jv,$$

on a $\frac{ju+j^2 v}{3} \in \mathbb{R}$ et $\frac{j^2 u+jv}{3} \in \mathbb{R}$.
Donc $\boxed{\text{si } \Delta > 0 \text{ l'équation admet trois solutions réelles distinctes.}}$