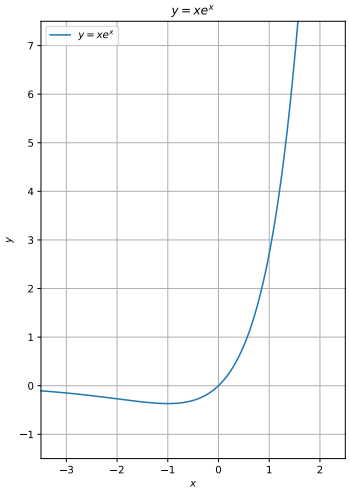
Introduction aux fonctions W de Lambert

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

La fonction W de Lambert (ou plus précisément les deux fonctions de Lambert W_0 et W_{-1}) sont, de même que de nombreuses fonctions "usuelles", définies comme bijections réciproques.
Il s'agit de la réciproque de $x \mapsto xe^x$ et interviennent dans de très nombreux domaines des mathématiques et sciences.
On se propose ici d'étudier les premières propriétés de ces fonctions W et de les utiliser dans des résolutions d'équations.



---

2. Introduction aux fonctions W de Lambert

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x. \end{array}$$

2.1. Dresser le tableau de variations de f.

2.I. Branche principale

2.2. Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
On note dans la suite $W_0 : [-e^{-1}, +\infty[\to [-1, +\infty[$ la bijection réciproque de cette bijection.
On note aussi Γ_{W_0} la courbe représentative de W_0.
2.3. Justifier brièvement que W_0 est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$.
2.4. Dresser le tableau de variations de W_0.
2.5. Déterminer l'équation de la tangente à Γ_{W_0} au point d'abcisse 0.
2.6. Représenter graphiquement Γ_{W_0} ainsi que la tangente de la question précédente.

2.II. Seconde branche

2.7. Justifier que f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $[-e^{-1}, 0[$.
On note dans la suite $W_{-1} : [-e^{-1}, 0[\to]-\infty, -1]$ la bijection réciproque de cette bijection.
On note aussi $\Gamma_{W_{-1}}$ la courbe représentative de W_{-1}.
2.8. Dresser le tableau de variations de W_{-1}.
2.9. Représenter graphiquement $\Gamma_{W_{-1}}$.

2.III. Résolution d'équations

2.10. Étant donné un paramètre $m \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$xe^x = m \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer selon la valeur de m le nombre de solutions de (1) et les expliciter à l'aide des fonctions W_0 et W_{-1}.

2.11. Étant donné un paramètre $m \in \mathbb{R}$ on considère l'inéquation

$$xe^x \leq m \tag{2}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Expliciter, selon les valeurs de m, l'ensemble des solutions de (2) à l'aide des fonctions W_0 et W_{-1}.

2.12. Étant donnés un paramètre $m \in \mathbb{R}$ et un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$x^\alpha e^x = m \tag{3}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Déterminer selon les valeurs de m et α le nombre de solutions de (3) et les expliciter à l'aide des fonctions W_0 et W_{-1}.

2.13. Étant donnés a et b deux réels paramètres on considère l'équation

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{4}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Expliciter, selon les valeurs de (a, b), l'ensemble des solutions de (4) à l'aide des fonctions W_0 et W_{-1}.

2.IV. Calcul numérique

2.14. Proposer un code Python prenant en argument un réel $y \in [-e^{-1}, +\infty[$ et renvoyant une valeur approchée de $W_0(y)$.
Le code devra être brièvement expliqué, ainsi que sa terminaison et correction.