**En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.**

---

## 2. Introduction aux fonctions $W$ de Lambert

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x. \end{array}$$

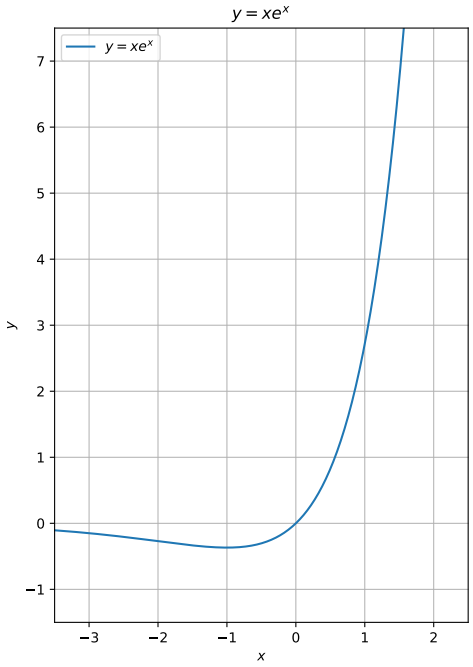
**2.1.** Dresser le tableau de variations de $f$.

On a $f$ dérivable comme produit de fonctions usuelles, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

et donc est du signe de $x+1$.
On a donc le tableau de variation suivant (les limites se déduisant des croissances comparées)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | ↘ | $-e^{-1}$ | ↗ | $+\infty$ |




### 2.I. Branche principale

**2.2.** Justifier que $f$ réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, d'après le **théorème de bijection continue strictement monotone** et le tableau de variations de la question **2.1.** on en déduit que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [-1, +\infty[ \text{ sur } [-e^{-1}, +\infty[}$.

On note dans la suite $W_0 : [-e^{-1}, +\infty[ \to [-1, +\infty[$ la bijection réciproque de cette bijection.
On note aussi $\Gamma_{W_0}$ la courbe représentative de $W_0$.

**2.3.** Justifier brièvement que $W_0$ est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

La fonction $W_0$ est $\boxed{\text{continue sur } [-e^{-1}, +\infty[}$ comme bijection réciproque d'une fonction continue.
De plus pour tout $y \in ]-e^{-1}, +\infty[$ on a $W_0(y) > -1$ d'où $f$ est dérivable en $W_0(y)$ et $f'(W_0(y)) = (W_0(y)+1)e^{W_0(y)} \neq 0$ d'où par dérivablité d'une fonction réciproque $W_0$ est dérivable en $y$ (et $W_0'(y) = \frac{1}{(W_0(y)+1)e^{W_0(y)}} = \frac{1}{y+e^{W_0(y)}}$).
Donc $\boxed{W_0 \text{ est dérivable sur } ]-e^{-1}, +\infty[}$.

**2.4.** Dresser le tableau de variations de $W_0$.

On peut étudier le signe de la dérivée ou bien constater directement que $W_0$ est strictement croissante comme bijection réciproque d'une fonction croissante et plus précisément réciproque d'une fonction ayant le tableau de variations suivant

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-e^{-1}$ | $+\infty$ |

Dans tous les cas on obtient le tableau de variations suivant:

| $x$ | $-e^{-1}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $+\infty$ |

(Cf la question **2.6.** pour un schéma.)

**2.5.** Déterminer l'équation de la tangente à $\Gamma_{W_0}$ au point d'abcisse 0.

Comme $W_0$ est dérivable en 0, l'équation de la tangente au point d'abcisse 0 est

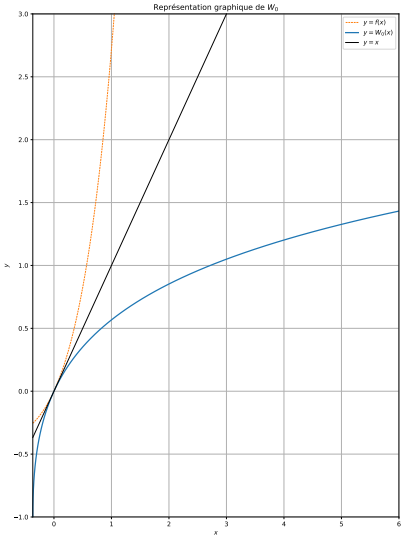
$$y = W_0'(0)(x-0) + W_0(0).$$

Or $W_0(0) = 0$ et $W_0'(0) = \frac{1}{(0+1)e^0} = 1$.
L'équation de la tangente est donc

$$\boxed{y = x}.$$

**2.6.** Représenter graphiquement $\Gamma_{W_0}$ ainsi que la tangente de la question précédente.

On obtient la figure suivante, obtenue par symétrie de la courbe représentative de $f_{|[-1,+\infty[}$.




(cf Annexe)

## 2.II. Seconde branche

**2.7.** Justifier que $f$ réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur $[-e^{-1},0[$.

De même la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, d'après le **théorème de bijection continue strictement monotone** et le tableau de variations de la question **2.1.** on en déduit que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de de } ]-\infty,-1] \text{ sur } [-e^{-1},0[}$.

On note dans la suite $W_{-1} : [-e^{-1},0[ \to ]-\infty,-1]$ la bijection réciproque de cette bijection.
On note aussi $\Gamma_{W_{-1}}$ la courbe représentative de $W_{-1}$.

**2.8.** Dresser le tableau de variations de $W_{-1}$.

On a le tableau de variations de $f_{]-\infty,-1]}$

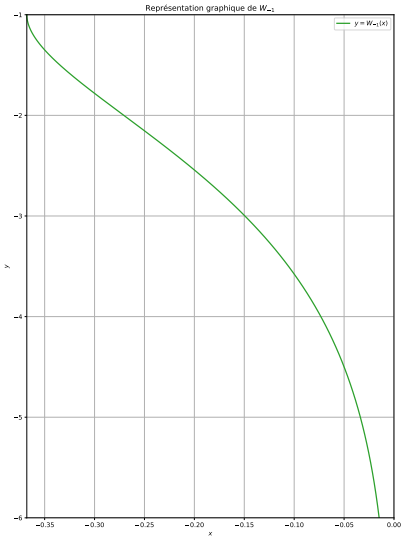
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ |

et $W_{-1}$, la fonction réciproque, a donc pour tableau de variations

| $x$ | $-e^{-1}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**2.9.** Représenter graphiquement $\Gamma_{W_{-1}}$.

On obtient la figure suivante, obtenue par symétrie de la courbe représentative de $f_{]-\infty,-1]}$.




(cf Annexe)

## 2.III. Résolution d'équations

**2.10.** Étant donné un paramètre $m \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$xe^x = m \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer selon la valeur de $m$ le nombre de solutions de (1) et les expliciter à l'aide des fonctions $W_0$ et $W_{-1}$.

D'après le **théorème de bijection continue strictement monotone** et les **tableaux de variations précédents on a** la disjonction de cas suivante (cf schéma)

- **Si** $m < -e^{-1}$ **alors** il n'y a aucune solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
- **Si** $m = -e^{-1}$ **alors** il y a une unique solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-1\}}$.
- **Si** $-e^{-1} < m < 0$ **alors** il y a deux solutions et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{W_{-1}(m), W_0(m)\}}$.
- **Si** $m = 0$ **alors** il y a une unique et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{0\}}$.
- **Si** $m > 0$ **alors** il y a une unique et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{W_0(m)\}}$.
  (cf Annexe pour le schéma)

**2.11.** Étant donné un paramètre $m \in \mathbb{R}$ on considère l'inéquation

$$xe^x \leq m \tag{2}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Expliciter, selon les valeurs de $m$, l'ensemble des solutions de (2) à l'aide des fonctions $W_0$ et $W_{-1}$.

De même que précédemment par **lecture du tableau de variation** on a
- Si $m < -e^{-1}$ alors l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
- Si $m = -e^{-1}$ alors l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-1\}}$.
- Si $-e^{-1} < m < 0$ alors l'ensemble des solutions est $\boxed{[W_{-1}(m), W_0(m)]}$.
- Si $m = 0$ alors l'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, 0]}$.
- Si $m > 0$ alors l'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, W_0(m)]}$.

**2.12.** Étant donnés un paramètre $m \in \mathbb{R}$ et un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$x^\alpha e^x = m \tag{3}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Déterminer selon les valeurs de $m$ et $\alpha$ le nombre de solutions de (3) et les expliciter à l'aide des fonctions $W_0$ et $W_{-1}$.

- **Si** $m \leq 0$ **alors** il n'y a pas de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
- **Si** $\alpha = 0$ **alors** l'équation se réécrit $e^x = m$ et donc
  - ▷ si $m > 1$ il y a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{\ln(m)\}}$.
  - ▷ si $m \leq 1$ il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$ et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.

Supposons désormais que $\alpha \neq 0$ et $m > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Par bijectivité de $t \mapsto t^\alpha$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$x^\alpha e^x = m \Leftrightarrow xe^{\frac{x}{\alpha}} = m^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)} = \frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}$$

et, en posant $u = \frac{x}{\alpha}$, on se ramène à l'équation $ue^u = \frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}$ de la question **2.10.**, avec la contrainte que $u$ soit du signe (strict) de $\alpha$.

- **Si** $\alpha > 0$ **alors** $u = \frac{x}{\alpha}$ parcourt $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} > 0$. Or $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective de bijection réciproque $W_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ (cf tableaux de variations et $f(0) = 0$), d'où

$$x^\alpha e^x = m \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = W_0\left(\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\right)$$

  et il existe une et unique solution : l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{\alpha W_0\left(\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\right)\right\}}.$$

- **Si** $\alpha < 0$ **alors** $u = \frac{x}{\alpha}$ parcourt $\mathbb{R}_-^*$ et $\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} < 0$. Les éventuelles solutions de $ue^u = \frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}$ sont alors automatiquement strictement négatives (car $ue^u \geq 0$ pour $u \geq 0$) et la question **2.10.** donne la disjonction de cas selon la position de $\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}$ par rapport à $-e^{-1}$.
  Or, comme $\alpha < 0$ et que $t \mapsto t^\alpha$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} > -e^{-1} \Leftrightarrow m^{\frac{1}{\alpha}} < -\alpha e^{-1} \Leftrightarrow m > (-\alpha)^\alpha e^{-\alpha}$$

  (et l'équivalence analogue avec des égalités). On obtient donc :
  - ▷ si $0 < m < (-\alpha)^\alpha e^{-\alpha}$ il n'y a aucune solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
  - ▷ si $m = (-\alpha)^\alpha e^{-\alpha}$ il y a une unique solution (correspondant à $u = -1$) et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-\alpha\}}$.

▷ si $m > (-\alpha)^\alpha e^{-\alpha}$ il y a deux solutions et l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{\alpha W_0\left(\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\right), \alpha W_{-1}\left(\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\right)\right\}}.$$

(On peut remarquer que $(-\alpha)^\alpha e^{-\alpha}$ est exactement la valeur minimale de $x \mapsto x^\alpha e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, atteinte en $x = -\alpha$ : l'étude directe de cette fonction redonne bien ce nombre de solutions.)

**2.13.** Étant donnés $a$ et $b$ deux réels paramètres on considère l'équation

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{4}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Expliciter, selon les valeurs de $(a, b)$, l'ensemble des solutions de (4) à l'aide des fonctions $W_0$ et $W_{-1}$.

- Si $b = 0$ alors l'équation se réécrit $e^{ax} = 0$ d'où il n'y a pas de solutions et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.

On suppose désormais $b \neq 0$.

- Si $a = 0$ alors l'équation se réécrit $1 + bx = 0$ d'où il y a une unique solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-\frac{1}{b}\}}$.

On suppose désormais $a \neq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\begin{aligned} e^{ax} + bx = 0 &\Leftrightarrow 1 + bxe^{-ax} = 0 \\ &\Leftrightarrow xe^{-ax} = -\frac{1}{b} \\ &\Leftrightarrow (-ax)e^{-ax} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

et on se ramène donc à la question **2.10.**, et donc

- Si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$ alors il n'y a aucune solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
- Si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$ alors il y a une unique solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{\frac{1}{a}\}}$.
- Si $-e^{-1} < \frac{a}{b} < 0$ alors il y a deux solutions solution et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-\frac{1}{a}W_{-1}\left(\frac{a}{b}\right), -\frac{1}{a}W_0\left(\frac{a}{b}\right)\}}$.
- Si $\frac{a}{b} > 0$ alors il y a une unique et l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-\frac{1}{a}W_0\left(\frac{a}{b}\right)\}}$.

## 2.IV. Calcul numérique

**2.14.** Proposer un code Python prenant en argument un réel $y \in [-e^{-1}, +\infty[$ et renvoyant une valeur approchée de $W_0(y)$.
Le code devra être brièvement expliqué, ainsi que sa terminaison et correction.

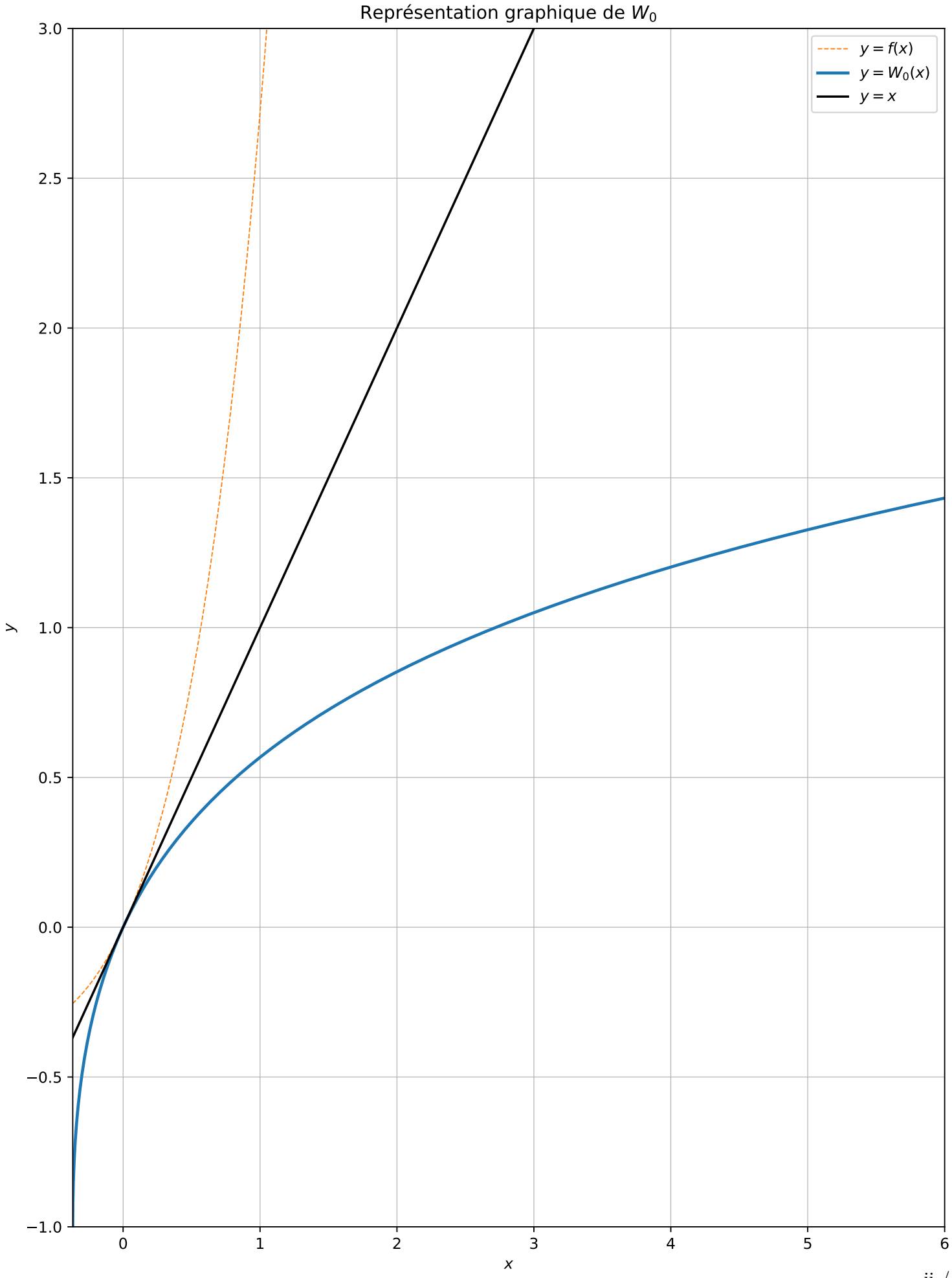
On procède par exemple par dichotomie.

```python
import numpy as np  # Pour exp


def f(x):
    """Prend en argument un flottant x et renvoie xe^x"""
    return x * np.exp(x)


def lambert_dicho(y, eps):
    """Prend en argument un flottant y et un flottant eps>0 et renvoie une valeur approchée de
    ↪ W0(y) à eps/2 près, par dichotomie"""
    assert y >= -np.exp(-1)  # La fonction n'est pas définie pour y<-exp(-1)
    assert eps > 0  # Sinon la boucle est infinie
    g, d = -1, y  # Initialisation, comme on a f(-1)<=y et y <= f(y),
    while d - g > eps:
        m = (g + d) / 2
        if f(m) > y:
            d = m
        else:
            g = m
    return (g + d) / 2

```

```python

def lambert(y):
    """Prend en argument un flottant y et renvoie une valeur approchée de W0(y)"""
    return lambert_dicho(y, 10 ** (-10))  # La valeur de 10**(-10) est arbitraire
```

- **Terminaison**: un variant de boucle est la valeur de $d-g$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $y+1$. Par conséquent elle tend vers 0, et à partir d'un certain rang est plus petit que $\varepsilon$.
  (On a même que la boucle s'arrête au bout de $\left\lceil \frac{\ln\left(\frac{y+1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rceil$ itérations).
- **Correction**:La propriété «$g \leq W_0(y) \leq d$» est bien un invariant de boucle.
  En effet initialement on a bien $-1 \leq W_0(y) \leq y$ (cf tableau de variation) et par algorithme de dichotomie la propriété est conservée.
  D'où la correction, car les valeurs finales de $g$ et $d$ vérifient bien $d-g \leq \varepsilon$ et $g \leq W_0(y) \leq d$, donc $\left|W_0(y) - \frac{g+d}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

**Représentation graphique de $W_0$**



**Représentation graphique de $W_{-1}$**

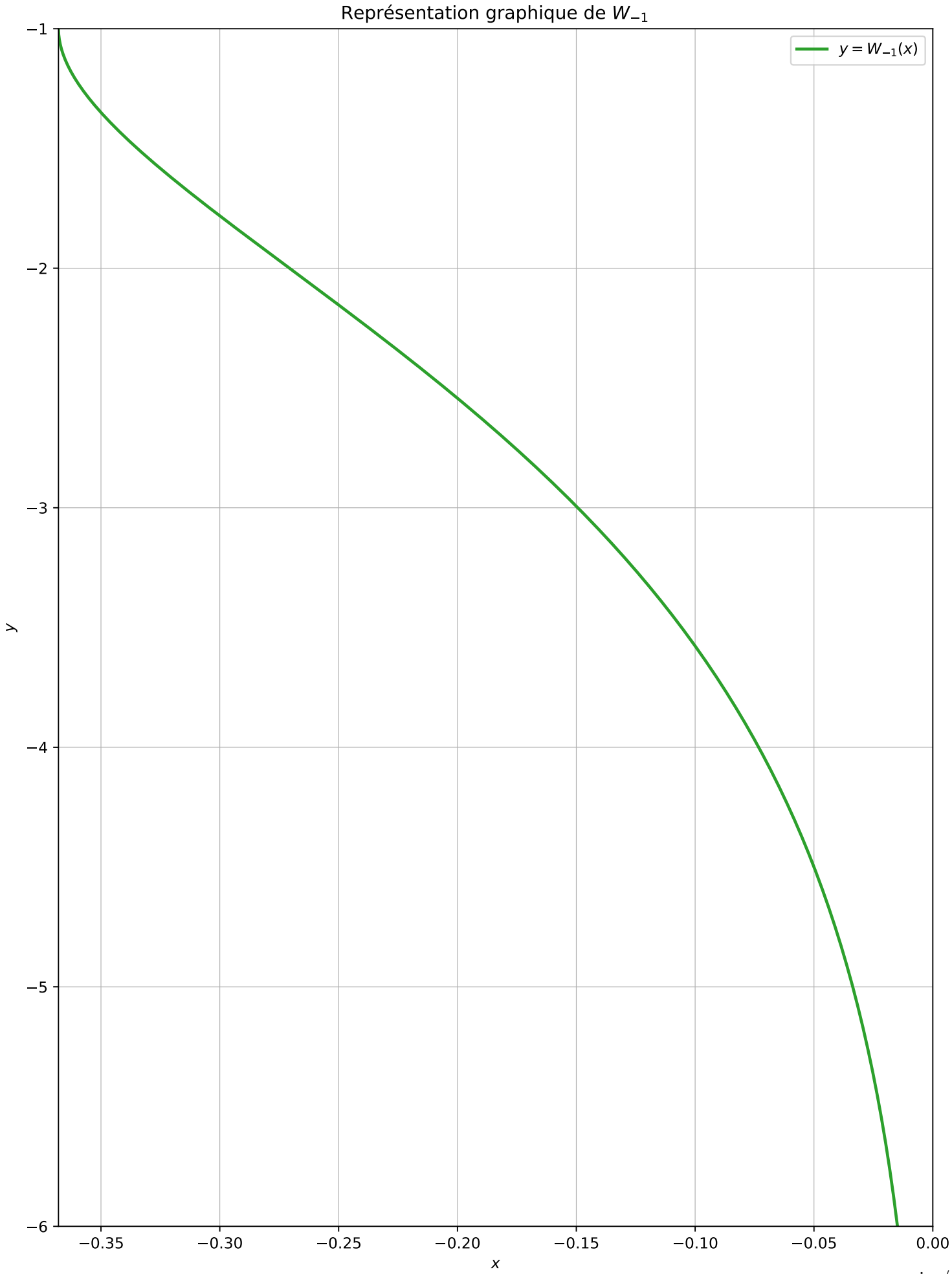
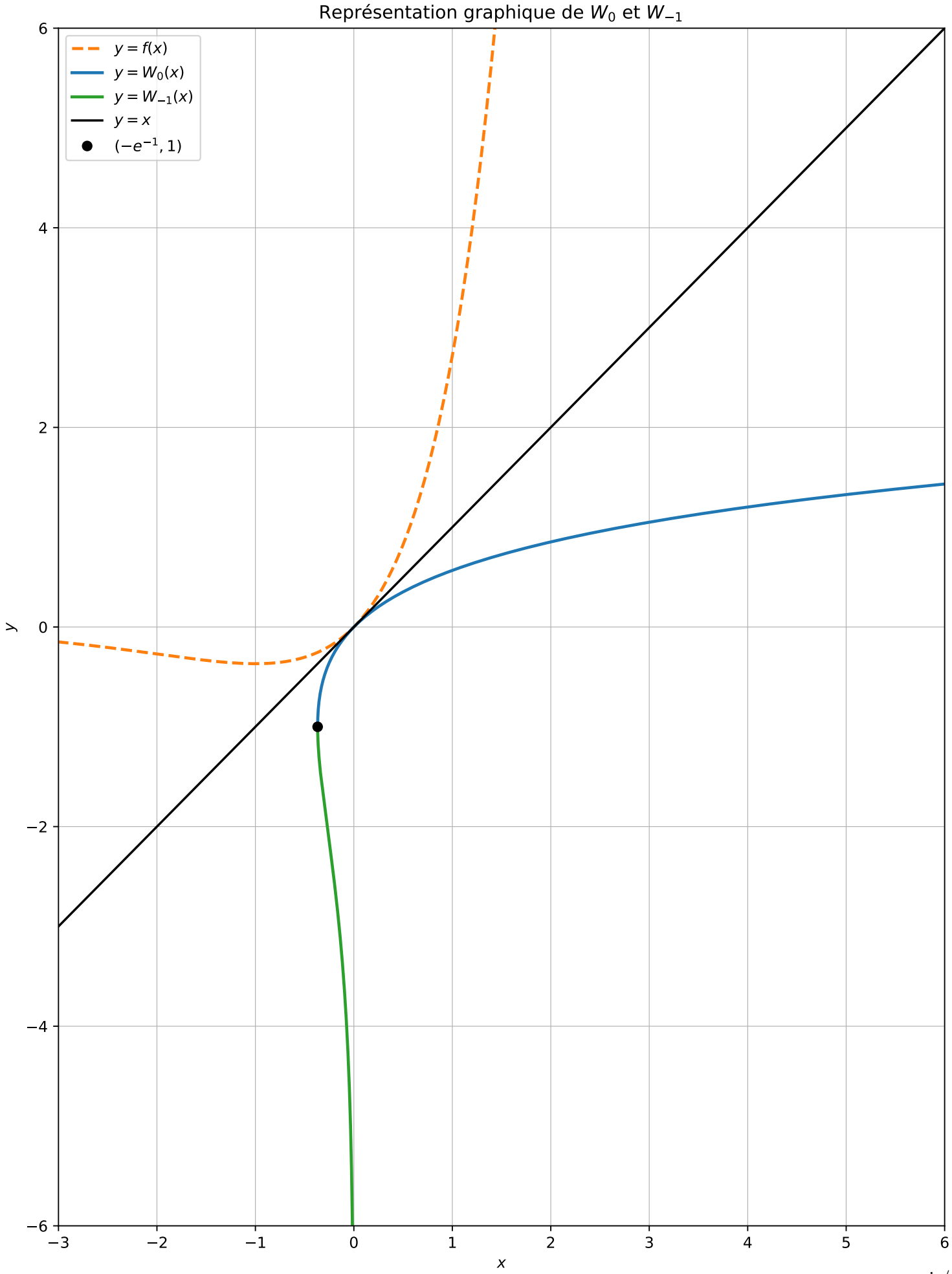


**Schéma récapitulatif**



**Nombre de solutions**

