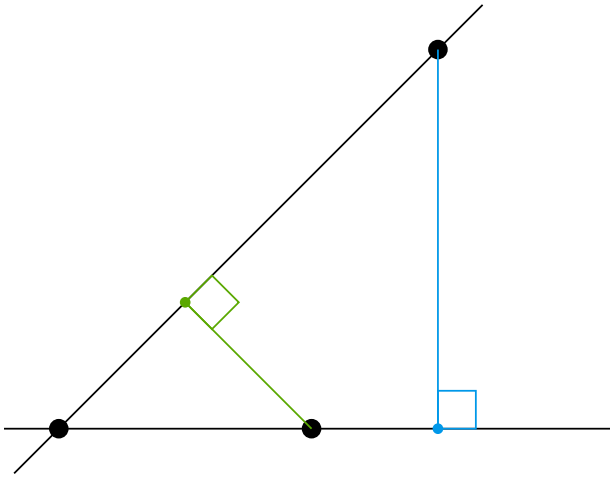
Lemme de Fekete – Autres preuves de de Bruijn-Erdős

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

- Le premier exercice consiste à démontrer le **lemme de Fekete** sur les suites sous-additives à l'aide des résultats sur les lim sup et lim inf démontrés dans le DM 8-1 (obligatoire).
  Ce lemme est particulièrement utilisé en probabilités, un exemple de son usage en théorie des grandes déviations en est donné en application.
- Le second exercice propose **deux preuves alternatives du théorème de de Bruijn-Erdős** vu dans le DM 8-2 (obligatoire).
  L'une combinatoire par double comptage, et l'autre par récurrence à l'aide du théorème de Sylvester-Gallai.
  Pour plus de détails sur les différentes preuves de ce théorème on renvoie vers [1].



Certains points de ce DM nécessitent des notions de Terminale en géométrie et en probabilité. N'hésitez pas à venir me voir pour plus de précisions.

---

1. Lemme de Fekete et grandes déviations

1.I. Lemme sous-additif de Fekete

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, c'est à dire que,

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

On souhaite montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

On pourra dans la suite, et si nécessaire, utiliser les résultats sur les limites supérieures et limites inférieures démontrés dans le DM 8-1.

1.1. Soit $k \geq 1$ un entier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $q_k(n)$ le quotient de la division euclidienne de n par k.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{n} \leq \frac{q_k(n)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1} (u_r).$$

1.2. On pose

$$\ell = \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{u_k}{k}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

1.II. Un premier pas vers les grandes déviations

Remarque: on pourra traiter cet exercice de probabilités comme en Terminale, c'est à dire sans se préoccuper de l'existence des objets manipulés.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes** et **identiquement distribuées** (c'est à dire suivant la même loi).

1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \geq x\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k \geq x\right).$$

1.4. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$.
Montrer qu'il existe $\ell \in]-\infty, 0]$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\right) = \ell.$$

1.5. Commenter.

2. Deux preuves supplémentaires de Bruijn-Erdős

On conserve les notations du DM 8-2. En particulier
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passant par le point P_i.
- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$.

2.I. Preuve combinatoire par double comptage

2.6. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ tels que $P_i \notin \mathcal{D}_j$.
Expliquer pourquoi $r_i \geq s_j$.

2.7. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i\notin\mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)} = 1.$$

2.8. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i\notin\mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = 1.$$

2.9. Conclure.

2.II. Preuve géométrique par Sylvester-Gallai

On rappelle qu'étant donné un point P et une droite $\mathcal{D}$ la distance de P à $\mathcal{D}$, noté $d(P, \mathcal{D})$ est égal à la distance entre P et le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

2.10. Montrer qu'il existe un couple (i_0, j_0) tel que

$$d(P_{i_0}, \mathcal{D}_{j_0}) = \min\left(\{d(P_i, \mathcal{D}_j), (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!] \text{ t.q } P_i \notin \mathcal{D}_j\}\right)$$

2.11. On note H le projeté orthogonal de P_{i_0} sur $\mathcal{D}_{j_0}$.
À l'aide d'un **schéma** montrer que pour tous points P_{i_1}, P_{i_2} de $\mathcal{D}_{j_0}$, P_{i_1} et P_{i_2} ne sont pas du "même coté de H sur $\mathcal{D}_j$" (c'est à dire que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{HP_{i_1}}, \overrightarrow{HP_{i_2}}\right) \not\equiv 0[2\pi]$).

2.12. Conclure que $s_{j_0} = 2$.

2.13. Démontrer par récurrence sur n le théorème de Bruijn-Erdős.

References

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Raisonnements divins: quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, 2 edition, 2006.