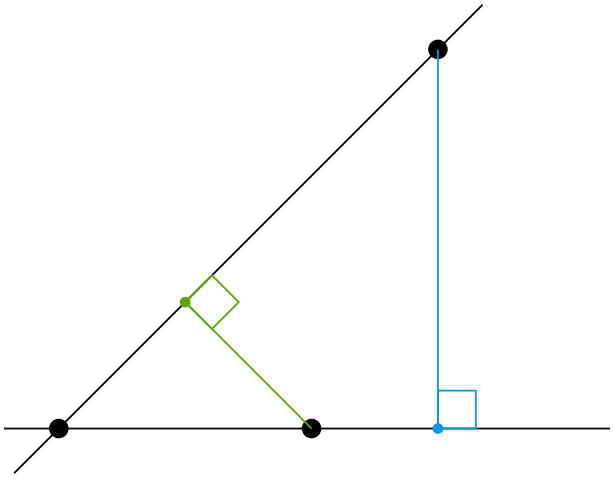
Corrigé du Lemme de Fekete – Autres preuves de de Bruijn-Erdős

En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

- Le premier exercice consiste à démontrer le **lemme de Fekete** sur les suites sous-additives à l'aide des résultats sur les lim sup et lim inf démontrés dans le DM 8-1 (obligatoire).
  Ce lemme est particulièrement utilisé en probabilités, un exemple de son usage en théorie des grandes déviations en est donné en application.
- Le second exercice propose **deux preuves alternatives du théorème de de Bruijn-Erdős** vu dans le DM 8-2 (obligatoire).
  L'une combinatoire par double comptage, et l'autre par récurrence à l'aide du théorème de Sylvester-Gallai.
  Pour plus de détails sur les différentes preuves de ce théorème on renvoie vers [1].



Certains points de ce DM nécessitent des notions de Terminale en géométrie et en probabilité. N'hésitez pas à venir me voir pour plus de précisions.

1. Lemme de Fekete et grandes déviations

1.I. Lemme sous-additif de Fekete

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, c'est à dire que,

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

On souhaite montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

On pourra dans la suite, et si nécessaire, utiliser les résultats sur les limites supérieures et limites inférieures démontrés dans le DM 8-1.

1.1. Soit $k \geq 1$ un entier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $q_k(n)$ le quotient de la division euclidienne de n par k.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{n} \leq \frac{q_k(n)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1} (u_r).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Tout d'abord on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que par sous-additivité,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{pk} \leq p u_k.$$

Si $n < k$, alors $q_k(n) = 0$ et $n = r_k(n)$, donc directement

$$u_n = u_{r_k(n)} \leq \max_{0\leq r\leq k-1} (u_r) = q_k(n)u_k + \max_{0\leq r\leq k-1} (u_r).$$

Si $n \geq k$, alors $q_k(n) \geq 1$ et avec $n = q_k(n)k + r_k(n)$ où $q_k(n)$ et $r_k(n)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par k, on a

$$u_n = u_{q_k(n)k+r_k(n)} \leq u_{q_k(n)k} + u_{r_k(n)} \leq q_k(n)u_k + u_{r_k(n)}$$

et comme $r_k(n) \in [\![0, k-1]\!]$ on a

$$u_{r_k(n)} \leq \max_{0\leq r\leq k-1} (u_r).$$

Dans les deux cas on obtient bien

$$u_n \leq q_k(n)u_k + \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)$$

ce qui comme $\frac{1}{n} > 0$ donne

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \leq \frac{q_k(n)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)}.$$

1.2. On pose

$$\ell = \inf_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{u_k}{k}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell.$$

On remarque tout d'abord que comme infimum d'un ensemble non vide de réels, $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.
On a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ell \leq \frac{u_n}{n}$$

donc par passage à la limite inférieure de l'inégalité large (cf DM 8-1),

$$\boxed{\ell \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}}.$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$.
On a vu à la question **1.1.** que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{q_k(n)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r).$$

Lorsque $n\to+\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$ et $\frac{q_k(n)}{n}\to\frac{1}{k}$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q_k(n)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)\right) = \frac{u_k}{k}$$

et donc en particulier

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{q_k(n)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)\right) = \frac{u_k}{k}.$$

Par passage à la limite supérieure de l'inégalité large (cf DM 8-1) on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

Comme $k\in\mathbb{N}^*$ est arbitraire on a donc montré

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \limsup_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

En passant à l'inf (sur $k\in\mathbb{N}^*$) on en déduit

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} \leq \ell}.$$

De par les deux inégalités démontrées et par l'inégalité entre lim inf et lim sup (cf DM 8-1) on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell = \liminf_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$$

c'est à dire (cf DM 8-1),

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell}.$$

1.II. Un premier pas vers les grandes déviations

Remarque: on pourra traiter cet exercice de probabilités comme en Terminale, c'est à dire sans se préoccuper de l'existence des objets manipulés.
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes** et **identiquement distribuées** (c'est à dire suivant la même loi).
1.3. Soit $x\in\mathbb{R}$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \geq x\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k \geq x\right).$$

On a

$$\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k = \frac{n}{n+m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \left(1-\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k\right)$$

par conséquent (si deux termes sont plus grands que x alors tout barycentre de ces deux termes est plus grand que x)

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \geq x\right\} \subset \left\{\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \geq x\right\}$$

par croissance des probabilités

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \geq x\right) \geq \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \geq x\right\}\right)$$

et par indépendance (formellement il faudrait utiliser le lemme de coalition, cf chapitre de probabilités)

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \geq x\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\ \mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \geq x\right)$$

tandis que comme les variables sont identiquement distribuées (formellement comme l'espérance dont la fonction de répartition ne dépend que de la loi)

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k \geq x\right).$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \geq x\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k \geq x\right)}.$$

1.4. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$.
Montrer qu'il existe $\ell \in]-\infty, 0]$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\right) = \ell.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ notons

$$p_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right).$$

Alors par la question **1.3.**, on a

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*, p_{n+m} \geq p_n p_m.$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq (p_1)^n$ (par récurrence) et comme $p_1 \neq 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n \in]0,1].$$

Comme ln est bien définie et croissante sur $]0,1]$ on en déduit

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*, \ln(p_{n+m}) \geq \ln(p_n) + \ln(p_m)$$

ou encore

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*, -\ln(p_{n+m}) \leq (-\ln(p_n)) + (-\ln(p_m)).$$

La suite $(-\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc sous-additive, par le lemme de Fekete (sous-section 1.I) on en déduit qu'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que

$$-\frac{1}{n}\ln(p_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_0.$$

Mais de plus on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(p_1)^n \leq p_n \leq 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(p_1) \leq \frac{1}{n}\ln(p_n) \leq 0$$

par passage à la limite des inégalités larges, en posant $\ell = -\ell_0$ on a $\underline{\ell \in]-\infty, 0]}$ et

$$\frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1.5. Commenter.

La probabilité $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)$ est la probabilité que la moyenne d'une expérience aléatoire soit dans une «queue de distribution».
Intuitivement on s'attend à ce que (intuition a priori **FAUSSE** car on ne peut pas passer à l'exponentielle les équivalents) si $\ell = 0$ alors la moyenne de très nombreuses expériences soit presque toujours supérieure à x et si $\ell < 0$ à ce que la probabilité soit au contraire à décroissance géométrique.
Avec des hypothèses supplémentaires on peut obtenir de meilleurs encadrements.
Par exemple si X_1 admet une espérance μ (en supposant ici de plus $X_k \geq 0$, $x > 0$ et $\mu > 0$, pour pouvoir appliquer Markov puis passer au logarithme), alors par inégalité de Markov,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{x} = \frac{\mu}{x}$$

d'où

$$\ln\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right)\right) \leq \ln(\mu) - \ln(x)$$

d'autres inégalités (Tchebychev, Chernoff, etc.) fournissant des encadrements encore plus précis.

2. Deux preuves supplémentaires de Bruijn-Erdős

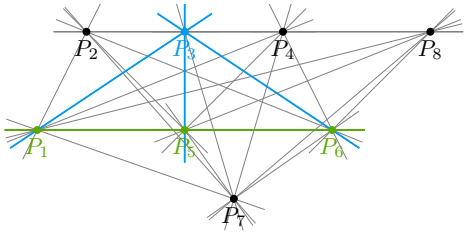
On conserve les notations du DM 8-2. En particulier
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passant par le point P_i.
- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$.

2.I. Preuve combinatoire par double comptage

2.6. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ tels que $P_i \notin \mathcal{D}_j$.
Expliquer pourquoi $r_i \geq s_j$.

À chaque point P_{i_0} de $\mathcal{D}_j$ on peut associer la droite $(P_iP_{i_0})$ qui passe par P_i (car $P_i \neq P_{i_0}$).
De plus ces droites sont deux à deux distinctes.
En effet si par l'absurde les droites $(P_iP_{i_1})$ et $(P_iP_{i_2})$ sont confondues avec P_{i_1} et P_{i_2} deux points distincts de $\mathcal{D}_j$ alors P_i, P_{i_1}, P_{i_2} sont alignés, et donc $P_i \in (P_{i_1}P_{i_2}) = \mathcal{D}_j$. Ce qui est absurde.
On a donc exhibé s_j droites passant par P_i, d'où

$$\boxed{r_i \geq s_j}.$$



2.7. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} = 1.$$

Remarquons tout d'abord que comme tous les points ne sont pas alignés, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i < m$ et donc la somme est bien définie.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

On a, comme il y a $m - r_i$ entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que $\mathcal{D}_j$ ne passe pas P_i,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)} &= \frac{1}{n(m-r_i)} \sum_{j=1}^{m} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \\ &= \frac{1}{n(m-r_i)}(m-r_i) \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

c'est à dire,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)} = 1}.$$

2.8. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = 1.$$

Remarquons tout d'abord que comme tous les points ne sont pas alignés, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $s_j < n$ et donc la somme est bien définie.
Soit $j \in [\![1, m]\!]$.
On a, comme il y a $n - s_j$ entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que P_i n'appartient pas à $\mathcal{D}_j$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} &= \frac{1}{m(n-s_j)} \sum_{i=1}^{n} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \\ &= \frac{1}{m(n-s_j)}(n-s_j) \\ &= \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m}.$$

c'est à dire,

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = 1}.$$

2.9. Conclure.

Par les questions **2.7.** et **2.8.** on a en particulier

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)}$$

et donc, par sommes doubles,

$$\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \left(\frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \right) = 0$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \\ P_i \notin \mathcal{D}_j}} \left(\frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \right) = 0.$$

Or comme les points ne sont pas tous alignés,

$$\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \mid P_i \notin \mathcal{D}_j\} \neq \emptyset.$$

Or une somme (non-vide) d'éléments strictements négatifs est strictement négative, d'où par contraposée,

$$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!],\ P_i \notin \mathcal{D}_j \text{ et } \frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \geq 0.$$

Fixons un tel couple (i,j).
Alors

$$\frac{1}{m(n-s_j)} \geq \frac{1}{n(m-r_i)}$$

et comme les deux termes sont positifs (car $s_j < n$ et $r_i < m$) on en déduit que

$$m(n-s_j) \leq n(m-r_i)$$

c'est à dire

$$mn - ms_j \leq nm - nr_i$$

ou encore

$$ms_j \geq nr_i.$$

Or comme $P_i \notin \mathcal{D}_j$, par la question **2.6.**,

$$s_j \leq r_i$$

on en déduit (tous les termes sont positifs)

$$\boxed{m \geq n}.$$

2.II. Preuve géométrique par Sylvester-Gallai

On rappelle qu'étant donné un point P et une droite $\mathcal{D}$ la distance de P à $\mathcal{D}$, noté $d(P,\mathcal{D})$ est égal à la distance entre P et le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

2.10. Montrer qu'il existe un couple (i_0, j_0) tel que

$$d(P_{i_0}, \mathcal{D}_{j_0}) = \min\left(\{d(P_i, \mathcal{D}_j), (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \text{ t.q } P_i \notin \mathcal{D}_j\}\right)$$

Comme les points ne sont pas tous alignés l'ensemble $\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \mid P_i \notin \mathcal{D}_j\}$ est non vide et fini.
Comme tout ensemble fini et non vide de réels admet un minimum, $\boxed{\text{il existe un tel couple } (i_0,j_0)}$.

2.11. On note H le projeté orthogonal de P_{i_0} sur $\mathcal{D}_{j_0}$.
À l'aide d'un **schéma** montrer que pour tous points P_{i_1}, P_{i_2} de $\mathcal{D}_{j_0}$, P_{i_1} et P_{i_2} ne sont pas du "même coté de H sur $\mathcal{D}_j$" (c'est à dire que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{HP_{i_1}}, \overrightarrow{HP_{i_2}}\right) \not\equiv 0[2\pi]$).

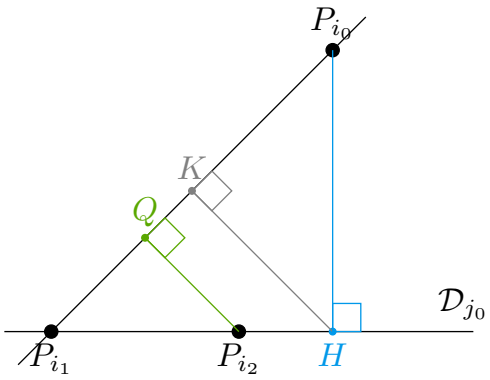
Si par l'absurde P_{i_1} et P_{i_2} sont du même coté de H, alors, quitte à les réordonner, et quitte à effectuer un retournement, on peut supposer que les points sont dans l'ordre: P_{i_1} puis P_{i_2}, puis H.
Notons Q le projeté orthogonal de P_{i_1} sur la droite $(P_{i_2}P_{i_0})$.
Alors en introduisant K la projection orthogonale de P_{i_2} sur $(P_{i_1}P_{i_0})$ on a (car dans un triangle rectangle le plus grand coté est l'hypoténuse, et par Thalès)

$$P_{i_2}Q < P_{i_0}H$$

d'où

$$0 < d(P_{i_2}, (P_{i_1}P_{i_0})) < d(P_{i_0}, (P_{i_1}P_{i_2})).$$

Ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$ par minimalité du couple $(P_{i_0}, \mathcal{D}_{i_0})$.



2.12. Conclure que $s_{j_0} = 2$.

On a par définition $s_{j_0} \geq 2$.
De plus si par l'absurde $s_{j_0} \geq 3$ alors $\mathcal{D}_{j_0}$ contient au moins trois points.
Mais alors au moins deux points sont "du même coté de H" (car il n'y a que deux cotés), ce qui contredit la question **2.11.**.

Par conséquent

$$\boxed{s_{j_0} = 2}.$$

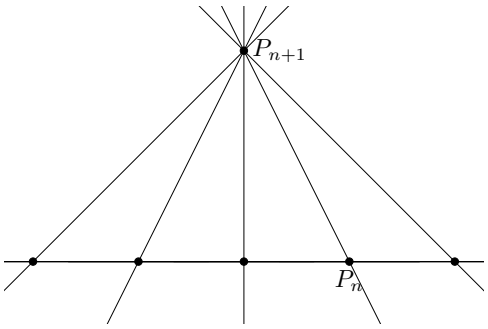
Remarque: on a démontré ici le théorème dit de «Sylvester-Gallai»:
On considère nombre fini de points du plan non tous alignés.
Il existe une droite passant par **exactement deux points**.

2.13. Démontrer par récurrence sur n le théorème de Bruijn-Erdős.

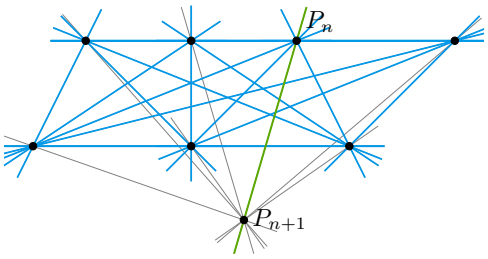
▶ **Initialisation**
Pour $n = 3$, si trois points ne sont pas alignés, alors ils forment un triangle non dégénéré et donc $m = 3$. Et $3 \geq 3$.

▶ **Hérédité**
Soit $n \geq 3$, et supposons la propriété vraie au rang n.
Considèrons $n+1$ points du plan non tous alignés $(P_1, \dots, P_{n+1})$.
Par la question **2.12.** il en existe deux tels que la droite passant par ces deux points ne passe par aucun autre point.
Quitte à renuméroter on peut supposer qu'il s'agit de $(P_n P_{n+1})$.
On procède alors par disjonction de cas.

- Si $(P_1, \dots, P_n)$ sont alignés alors on est dans la situation du schéma à droite et donc $m = n + 1$.



- Si $(P_1, \dots, P_n)$ ne sont pas alignés, alors par hypothèse de récurrence il y a au moins n droites entre ces points.
- De plus aucune de ces droites n'est égale à la droite $(P_n P_{n+1})$ (par construction).
  D'où il y a au moins $n+1$ droites entre $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$.



Dans tous les cas $m \geq n + 1$.

▶ **Conclusion**
La propriété étant initialisée et héréditaire on a donc, pour tout $n \geq 3$, pour tout ensemble de n points du plan non tous alignés, il existe au moins n droites passant par ces points.

On a donc bien démontré le théorème de $\boxed{\text{Bruijn-Erdős}}$.

References

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Raisonnements divins: quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, 2 edition, 2006.