Estimées du nombre de nombres premiers

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet est un extrait du DM 9 de l'année 2022–2023. Il complète le sujet *Nombres premiers et Tchebychev* (encadrements « à la Tchebychev » de $\pi(x)$) par trois compléments indépendants :

- une minoration *élémentaire* de $\pi(x)$ obtenue à partir de l'argument d'Euclide (partie A) ;
- l'étude de la *fonction de Tchebychev* $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p)$ et de son lien avec $\pi(x)$ (partie B) ;
- une comparaison des estimées obtenues avec le *théorème des nombres premiers* (partie C).

On suppose connues les notions d'arithmétique des entiers (nombres premiers, valuation p-adique) et les croissances comparées usuelles.

Notations

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.
- Pour $x > 0$ on définit $\pi(x) = \text{card}\,(\mathcal{P} \cap]0, x])$, le nombre de nombres premiers plus petits que x.
- On note
$$\sum_{p\leq x} \cdot$$
au lieu de
$$\sum_{\substack{0<p\leq \lfloor x\rfloor \\ p \text{ premier}}} \ddots$$
Par exemple on pourra écrire
$$\forall x > 1, \quad \pi(x) = \sum_{p\leq x} 1.$$
- On définit la fonction θ de Tchebychev, $\theta\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, par
$$\forall x > 1, \quad \theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p).$$

---

1 Estimées d'Euclide

1.1. Montrer que $\pi\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

1.2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\pi(x) \leq x.$$

1.3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\pi(p_n)$.

1.4. Expliquer pourquoi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} \leq 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

1.5. En déduire par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \leq 2^{2^n}.$$

1.6. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\pi\left(2^{2^n}\right) \geq n,$$

puis que pour tout $y \geq 0$

$$\pi\left(2^{2^y}\right) \geq y - 1.$$

1.7. En déduire que $\forall x > 1$

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(2)} - \left(1 + \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}\right).$$

2 Lien entre θ et π

2.1. Montrer que pour tous $x, y > 1$ tels que $y \leq x$ on a

$$\ln(y)\big(\pi(x) - \pi(y)\big) \leq \theta(x) - \theta(y) \leq \ln(x)\big(\pi(x) - \pi(y)\big).$$

2.2. En déduire que pour tout $x > 1$

$$\forall y \in]1, x], \quad \frac{\theta(x) - \theta(y)}{\ln(x)} + \pi(y) \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x) - \theta(y)}{\ln(y)} + \pi(y).$$

2.3. En déduire que pour tout $x > 1$

$$\forall y \in]1, x], \quad \frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(y)} + y.$$

2.4. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x > 1$

$$\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} + \frac{x}{(\ln(x))^2}.$$

3 Comparaison avec le théorème des nombres premiers

On rappelle les deux résultats admis suivants.

- **Encadrements de Tchebychev.** On admet ici le résultat suivant, démontré (par une autre méthode) dans le sujet *Nombres premiers et Tchebychev* :

$$\forall n \geq 7, \quad \ln(2)\,\frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n) \leq e\,\frac{n}{\ln(n)}.$$

  En particulier il existe deux constantes $0 < C_- \leq C_+$ telles que, pour x assez grand,

$$C_-\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq C_+\frac{x}{\ln(x)}.$$

- **Théorème des nombres premiers** (admis). Lorsque $x \to +\infty$,

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}}.$$

3.1. Comparer les estimées obtenues dans ce sujet avec le théorème des nombres premiers.

3.2. Montrer, à l'aide de la partie 2, que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta(x) \sim x.$$