En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet est un extrait du DM 9 de l'année 2022–2023. Il complète le sujet *Nombres premiers et Tchebychev* (encadrements « à la Tchebychev » de $\pi(x)$) par trois compléments indépendants :
- une minoration *élémentaire* de $\pi(x)$ obtenue à partir de l'argument d'Euclide (partie A) ;
- l'étude de la *fonction de Tchebychev* $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p)$ et de son lien avec $\pi(x)$ (partie B) ;
- une comparaison des estimées obtenues avec le *théorème des nombres premiers* (partie C).

On suppose connues les notions d'arithmétique des entiers (nombres premiers, valuation p-adique) et les croissances comparées usuelles.

Notations

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.
- Pour $x > 0$ on définit $\pi(x) = \text{card}\,(\mathcal{P} \cap]0, x])$, le nombre de nombres premiers plus petits que x.
- On note
$$\sum_{p\leq x}.$$
au lieu de
$$\sum_{\substack{0<p\leq \lfloor x\rfloor \\ p \text{ premier}}} \ldots$$
Par exemple on pourra écrire
$$\forall x > 1, \quad \pi(x) = \sum_{p\leq x} 1.$$
- On définit la fonction θ de Tchebychev, $\theta\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, par
$$\forall x > 1, \quad \theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p).$$

---

1 Estimées d'Euclide

1.1. Montrer que $\pi\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leq y$.
Alors
$$\pi(y) - \pi(x) = \sum_{x<p\leq y} 1$$
et une somme (éventuellement indexée par le vide et donc nulle) d'éléments positifs étant positive, on a $\pi(y) - \pi(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\pi(y) \geq \pi(x)$.
Donc $\boxed{\pi \text{ est croissante}}$.

1.2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\pi(x) \leq x.$$

Soit $x > 0$.
Un nombre premier étant un entier naturel non nul, il y a moins de nombres premiers inférieurs à x que d'entiers naturels non nuls inférieurs à x.
Donc $\pi(x) \leq \lfloor x \rfloor$ et en particulier $\boxed{\pi(x) \leq x}$.

1.3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\pi(p_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme p_n est le n-ième nombre premier (rangés par ordre usuel) il y a donc n nombres premiers inférieurs à p_n, c'est-à-dire

$$\boxed{\pi(p_n) = n}.$$

1.4. Expliquer pourquoi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} \leq 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'entier $N = 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k$ n'est divisible par aucun p_k pour k allant de 1 à n (car le reste de la division euclidienne est 1).
Soit P un diviseur premier de N (il en existe car tout entier ≥ 2 admet un diviseur premier).
Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \neq P$. En particulier $p_{n+1} \leq P$.
Et comme $P \leq N$ on en déduit

$$\boxed{p_{n+1} \leq 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k}.$$

1.5. En déduire par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \leq 2^{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la proposition

$$(\mathcal{P}_n) : \quad p_n \leq 2^{2^n}$$

et procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation**: on a $p_1 = 2 \leq 4 = 2^{2^1}$.
- **Hérédité**: soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\forall k \leq n$, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie. Alors pour tout $k \leq n$ on a

  $$0 \leq p_k \leq 2^{2^k}$$

  et donc par produit d'inégalités positives

  $$\prod_{k=1}^{n} p_k \leq \prod_{k=1}^{n} 2^{2^k}$$

  d'où

  $$\begin{aligned} 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k &\leq 1 + 2^{\sum_{k=1}^{n} 2^k} \\ &= 1 + 2^{2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}} \\ &= 1 + 2^{2^{n+1} - 2} \\ &\leq 2^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

  Par la question **1.4.** on obtient alors

  $$p_{n+1} \leq 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k \leq 2^{2^{n+1}}$$

  ce qui est bien $(\mathcal{P}_{n+1})$.
- **Conclusion**: par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie, i.e.

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{p_n \leq 2^{2^n}}.$$

1.6. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\pi\left(2^{2^n}\right) \geq n,$$

puis que pour tout $y \geq 0$

$$\pi\left(2^{2^y}\right) \geq y - 1.$$

Comme la fonction π est croissante (question **1.1.**), de l'inégalité de la question **1.5.**

$$p_n \leq 2^{2^n}$$

on déduit

$$\pi(p_n) \leq \pi\left(2^{2^n}\right)$$

c'est-à-dire (question **1.3.**)

$$\boxed{n \leq \pi\left(2^{2^n}\right)}.$$

Soit $y \geq 1$ (le cas $y \in [0,1[$ est immédiat car alors $0 \geq y-1$). On a

$$\lfloor y \rfloor \leq y$$

d'où par croissance de $\xi \mapsto 2^\xi$

$$2^{2^{\lfloor y \rfloor}} \leq 2^{2^y}.$$

Par croissance de π on en déduit

$$\pi\left(2^{2^{\lfloor y \rfloor}}\right) \leq \pi\left(2^{2^y}\right)$$

et comme $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lfloor y \rfloor \leq \pi\left(2^{2^{\lfloor y \rfloor}}\right)$$

d'où on déduit finalement, de $y-1 \leq \lfloor y \rfloor$,

$$\boxed{y-1 \leq \pi\left(2^{2^y}\right)}.$$

1.7. En déduire que $\forall x > 1$

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(2)} - \left(1 + \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}\right).$$

Soit $x \geq 2$ (si $x \leq 2 \leq e$ le terme de droite est négatif, l'inégalité est immédiate).
Avec

$$y = \log_2\left(\log_2(x)\right) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \ln(\ln(x)) - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}$$

on a

$$2^{2^y} = x$$

et donc par la question précédente

$$\pi(x) \geq y - 1$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\pi(x) \geq \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(2)} - \left(1 + \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}\right)}.$$

Remarque: cette minoration élémentaire est très peu précise (elle est en $\ln(\ln(x))$). On verra dans la partie 3 qu'elle est très loin de la vraie taille de $\pi(x)$.

2 Lien entre θ et π

2.1. Montrer que pour tous $x, y > 1$ tels que $y \leq x$ on a

$$\ln(y)\big(\pi(x) - \pi(y)\big) \leq \theta(x) - \theta(y) \leq \ln(x)\big(\pi(x) - \pi(y)\big).$$

Soient x et y tels que $1 < y \leq x$.
Alors

$$\theta(x) - \theta(y) = \sum_{y < p \leq x} \ln(p) = \sum_{p \in \mathcal{P} \cap]y,x]} \ln(p).$$

Or

$$\forall p \in \mathcal{P} \cap]y,x], \quad \ln(y) \leq \ln(p) \leq \ln(x)$$

d'où

$$\ln(y) \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \theta(x) - \theta(y) \leq \ln(x) \sum_{y < p \leq x} 1.$$

De plus

$$\sum_{y < p \leq x} 1 = \pi(x) - \pi(y)$$

et donc

$$\boxed{\ln(y)\big(\pi(x)-\pi(y)\big) \leq \theta(x)-\theta(y) \leq \ln(x)\big(\pi(x)-\pi(y)\big)}.$$

2.2. En déduire que pour tout $x > 1$

$$\forall y \in]1,x], \quad \frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(x)} + \pi(y) \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(y)} + \pi(y).$$

Soit $x > 1$ et $y \in]1,x]$.

- De l'inégalité (question **2.1.**)

$$\ln(y)\big(\pi(x)-\pi(y)\big) \leq \theta(x)-\theta(y)$$

on déduit, comme $\ln(y) > 0$,

$$\pi(x)-\pi(y) \leq \frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(y)}$$

et donc

$$\boxed{\pi(x) \leq \frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(y)} + \pi(y)}.$$

- De l'inégalité (question **2.1.**)

$$\theta(x)-\theta(y) \leq \ln(x)\big(\pi(x)-\pi(y)\big)$$

on déduit, comme $\ln(x) > 0$,

$$\frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(x)} \leq \pi(x)-\pi(y)$$

et donc

$$\boxed{\frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(x)} + \pi(y) \leq \pi(x)}.$$

2.3. En déduire que pour tout $x > 1$

$$\forall y \in]1,x], \quad \frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(y)} + y.$$

Soit $x > 1$ et $y \in]1,x]$.

- On a $\theta(y) \geq 0$ et $\pi(y) \leq y$ (partie A) donc

$$\frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(y)} + \pi(y) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(y)} + y.$$

- On a, d'après la question **2.1.** appliquée entre 1 et y (ou directement),

$$\theta(y) \leq \pi(y)\ln(y) \leq \pi(y)\ln(x)$$

donc

$$-\frac{\theta(y)}{\ln(x)} + \pi(y) \geq 0$$

et donc

$$\frac{\theta(x)-\theta(y)}{\ln(x)} + \pi(y) \geq \frac{\theta(x)}{\ln(x)}.$$

On déduit alors de la question **2.2.** que

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(y)} + y}.$$

2.4. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x > 1$

$$\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} + \frac{x}{(\ln(x))^2}.$$

Soit $x > 1$.

On a déjà démontré à la question **2.3.** que

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x)}.$$

De plus

$$\forall y \in]1, x], \quad \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(y)} + y.$$

En particulier (si $x > e$, les cas $x \in]1, 2[$ et $x \in [2, 3[$ étant immédiats), pour

$$y = \frac{x}{\ln(x)^2}$$

on a $\ln(y) = \ln(x) - 2\ln(\ln(x))$ et on obtient bien

$$\boxed{\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} + \frac{x}{(\ln(x))^2}}.$$

Remarque: l'idée générale d'obtenir une inégalité *paramétrique* pour ensuite optimiser sur le paramètre (y ici) vaut la peine d'être retenue. Le « meilleur » choix de y (minimisant le membre de droite) ne se résout pas explicitement ; on se contente d'un choix « assez bon » d'expression simple.

3 Comparaison avec le théorème des nombres premiers

On rappelle les deux résultats admis suivants.

- **Encadrements de Tchebychev.** On admet ici le résultat suivant, démontré (par une autre méthode) dans le sujet *Nombres premiers et Tchebychev* :

$$\forall n \geq 7, \quad \ln(2)\,\frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n) \leq e\,\frac{n}{\ln(n)}.$$

  En particulier il existe deux constantes $0 < C_- \leq C_+$ telles que, pour x assez grand,

$$C_-\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq C_+\frac{x}{\ln(x)}.$$

- **Théorème des nombres premiers** (admis). Lorsque $x \to +\infty$,

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}}.$$

3.1. Comparer les estimées obtenues dans ce sujet avec le théorème des nombres premiers.

- La minoration élémentaire d'Euclide (partie A) donne, avec la majoration $\pi(x) \leq x$, un encadrement du type

$$c\,\ln(\ln(x)) \leq \pi(x) \leq x.$$

  Il est très peu précis au regard du théorème des nombres premiers : en effet $\ln(\ln(x)) \ll \frac{x}{\ln(x)} \ll x$.
- Les encadrements de Tchebychev

$$C_-\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq C_+\frac{x}{\ln(x)}$$

  sont bien meilleurs : ils montrent $\pi(x) = \Theta\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$, soit le *bon ordre de grandeur*, mais avec des constantes multiplicatives qui ne valent pas 1.
- Ces méthodes ne suffisent pas à démontrer le théorème des nombres premiers : il faudrait montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\text{pour } x \text{ assez grand}, \quad (1-\varepsilon)\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq (1+\varepsilon)\frac{x}{\ln(x)},$$

  alors que les encadrements de Tchebychev fournissent seulement des constantes $\ln(2) \approx 0{,}69$ et $e \approx 2{,}72$, trop éloignées de 1.

Remarque: la démonstration de l'équivalent $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ (Hadamard et de la Vallée-Poussin, 1896) est nettement plus difficile.

3.2. Montrer, à l'aide de la partie 2, que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta(x) \sim x.$$

D'après la question **2.4.**, pour tout $x > e$,

$$\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} + \frac{x}{(\ln(x))^2}.$$

En multipliant par $\frac{\ln(x)}{x} > 0$ on obtient

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \pi(x)\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\theta(x)}{x} \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} + \frac{1}{\ln(x)}.$$

Or par croissances comparées

$$\frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

- **Si** $\theta(x) \sim x$, i.e. $\frac{\theta(x)}{x} \to 1$, alors les deux membres encadrant $\pi(x)\frac{\ln(x)}{x}$ tendent vers 1, donc par le théorème des gendarmes $\pi(x)\frac{\ln(x)}{x} \to 1$, c'est-à-dire $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.
- **Réciproquement, si** $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$, i.e. $\pi(x)\frac{\ln(x)}{x} \to 1$, alors de l'inégalité de gauche

  $$\frac{\theta(x)}{x} \leq \pi(x)\frac{\ln(x)}{x}$$

  et de l'inégalité de droite réécrite

  $$\frac{\theta(x)}{x} \geq \left(\pi(x)\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{\ln(x)}\right)\frac{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))}{\ln(x)},$$

  on déduit par le théorème des gendarmes que $\frac{\theta(x)}{x} \to 1$, c'est-à-dire $\theta(x) \sim x$.

On a donc bien

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \iff \theta(x) \sim x}.$$

Remarque: le théorème des nombres premiers est ainsi *équivalent* à $\theta(x) \sim x$. C'est souvent sous cette dernière forme qu'il est démontré.