On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

1. Évaluation de Digamma en un rationnel

Dans tout le problème, on fixe $x > 0$.

1.I. Définition de la fonction F

1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)} \leq \int_0^n \frac{1}{(t+1)(t+x)} \mathrm{d}t.$$

1.2. En déduire que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge.
On note dans la suite $F(x)$ cette limite, c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right).$$

On définit de même $F(x+1)$.
1.3. Montrer que

$$F(x+1) - F(x) = \frac{1}{x}.$$

1.II. Expression intégrale de F

On définit la fonction

$$f_x : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-t^x}{1-t} & \text{si } t \in [0,1[\\ x & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

1.4. Montrer que $f_x \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
Dans la suite on pourra noter, si on le souhaite,

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} \mathrm{d}t$$

au lieu de

$$\int_0^1 f_x(t) \mathrm{d}t$$

et faire de même pour toute fonction prolongeable par continuité.
1.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_x(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k (1-t^x) \mathrm{d}t + \int_0^1 t^{n+1} f_x(t) \mathrm{d}t.$$

1.6. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 t^{n+1} f_x(t)\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{1}{n+2}.$$

1.7. Conclure que

$$F(x+1) = \int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t.$$

1.III. Décomposition en éléments simples et racines de l'unité

On suppose dans la suite du problème que $x \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$.
On fixe alors $p, q \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que

$$x = \frac{p}{q}$$

et $p \wedge q = 1$ (on remarquera que $1 \leq p \leq q-1$).

1.8. Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{X^{q-1} - X^{p+q-1}}{1-X^q} = X^{p-1} + \frac{1}{q}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \frac{\omega^p - 1}{X-\omega}$$

1.9. En déduire, à l'aide d'un changement de variables, que

$$\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{p}{q}}}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{q}{p} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} (\omega^p - 1)\int_0^1 \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t.$$

1.10. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t = \ln(1-(1-\varepsilon)^q) - \ln(1-(1-\varepsilon)).$$

1.IV. Un dernier calcul d'intégrale

1.11. Déduire de la question **1.10.** la valeur de

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^1 \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t.$$

1.12. Soit $\theta \in]0,\pi[$.
Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t = \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}$$

1.13. Conclure que

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = -\ln(2q) + \sum_{k=1}^{q-1}\left(\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(k\pi\frac{1}{q}\right)\right) + \sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)k\pi\frac{1}{q}\right)$$