En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

1. Évaluation de Digamma en un rationnel

Dans tout le problème, on fixe $x > 0$.

1.I. Définition de la fonction F

1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)} \leq \int_0^n \frac{1}{(t+1)(t+x)} \mathrm{d}t.$$

La fonction

$$f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & & \frac{1}{(t+1)(t+x)} \end{array}$$

est continue et décroissante (par exemple car dérivable de dérivée $t \mapsto -\frac{2t+(x+1)}{(t+1)^2(t+x)^2}$ négative sur l'intervalle $[0,+\infty[$).
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Par décroissante de f on a

$$\forall t \in [k-1, k],\ f(k) \leq f(t)$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire (comme $k-(k-1)=1$),

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant de $k=1$ à n on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

Et donc par relation de Chasles on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)} \leq \int_0^n \frac{1}{(t+1)(t+x)} \mathrm{d}t}.$$

1.2. En déduire que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right) &= 1 - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+x-(k+1))}{(k+1)(k+x)} \\ &= 1 - \frac{1}{x} + (x-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)} \end{aligned}.$$

Tout d'abord si $x = 1$ il s'agit de la suite nulle, qui est bien convergente.
On suppose désormais que $x \neq 1$
En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)}$$

il suffit donc de montrer que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Or:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{1}{(n+2)(n+1+x)} \geq 0$$

  et donc $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question **1.1.**

$$S_n(x) \leq \int_0^n \frac{1}{(t+1)(t+x)} \mathrm{d}t.$$

  Or on a

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{1}{(t+1)(t+x)} \mathrm{d}t &\leq \int_0^n \frac{1}{(t+\min(1,x))^2} \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t+\min(1,x)}\right]_0^n \\ &= \frac{1}{\min(1,x)} - \frac{1}{n+\min(1,x)} \\ &\leq \frac{1}{\min(1,x)}.\end{aligned}$$

  Donc $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Par théorème de convergence monotone on en déduit donc que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On note dans la suite $F(x)$ cette limite, c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right).$$

On définit de même $F(x+1)$.
1.3. Montrer que

$$F(x+1) - F(x) = \frac{1}{x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par somme télescopique on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{n+x+1}.\end{aligned}$$

Tous les termes admettant une limite, en passant à la limite on obtient

$$\boxed{F(x+1) - F(x) = \frac{1}{x}}.$$

1.II. Expression intégrale de F

On définit la fonction

$$f_x : \begin{array}{c} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-t^x}{1-t} & \text{si } t \in [0,1[\\ x & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

1.4. Montrer que $f_x \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

- Par caractère local de la continuité, on a f_x continue en en tout point de $[0,1[$. (À détailler si nécessaire).
- On a pour t au voisinage de 1^-, par développement limité à l'ordre 1, comme $1-t \xrightarrow[t\to 1]{} 0$:

$$\begin{aligned} t^x &= \exp(x\ln(t)) \\ &= \exp(x\ln(1-(1-t))) \\ &= \exp(x(-(1-t)+o_{t\to 1}(1-t))) \\ &= 1-x(1-t)+o_{t\to 1}(1-t) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1-t^x}{1-t} &= \frac{1-(1-x(1-t))+o_{t\to 1}(1-t)}{1-t} \\ &x+o_{t\to 1}(1) \end{aligned}$$

et donc f_x est bien continue en 1.

Par conséquent $\boxed{f_x \text{ est continue en tout point } [0,1]}$.

Dans la suite on pourra noter, si on le souhaite,

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\mathrm{d}t$$

au lieu de

$$\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t$$

et faire de même pour toute fonction prolongeable par continuité.

1.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k(1-t^x)\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $t \in [0,1[$, par somme géométrique de raison différente de 1,

$$\frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

et donc

$$\frac{1-t^x}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t^x) + t^{n+1}\frac{1-t^x}{1-t}.$$

c'est-à-dire

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t^x) + t^{n+1}f_x(t).$$

On remarque que la relation précédente reste valide pour $x=1$

Remarque: ce n'est pas nécessaire de vérifier pour $x=1$ si deux fonctions sont égales sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Ainsi en particulier on a

$$\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^k(1-t^x) + t^{n+1}f_x(t)\right)\mathrm{d}t.$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k(1-t^x)\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t}.$$

1.6. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{1}{n+2}.$$

Comme f_x est continue sur le segment $[0,1]$, par le théorème des bornes atteintes il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in [0,1],\ |f_x(t)| \leq M.$$

On a donc

$$\left|\int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t\right| \leq M\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t$$

et comme $\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}$, on en déduit que

$$\boxed{\left|\int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{1}{n+2}}.$$

1.7. Conclure que

$$F(x+1) = \int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^k(1-t^x)\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^k\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{k+x}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1}\end{aligned}$$

et donc par la question **1.5.**,

$$\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1}\right) + \int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t.$$

Or

- Par définition on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x+1).$$

- Par la question **1.6.** et par encadrement,

$$\int_0^1 t^{n+1}f_x(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par passage à la limite dans l'égalité précédente on déduit donc que

$$\boxed{\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = F(x+1)}.$$

1.III. Décomposition en éléments simples et racines de l'unité

On suppose dans la suite du problème que $x \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$.

On fixe alors $p, q \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que

$$x = \frac{p}{q}$$

et $p \wedge q = 1$ (on remarquera que $1 \leq p \leq q-1$).

1.8. Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{X^{q-1} - X^{p+q-1}}{1 - X^q} = X^{p-1} + \frac{1}{q} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}} \frac{\omega^p - 1}{X - \omega}$$

On a $X^{q-1} - X^{p+q-1} = X^{p-1}(1 - X^q) + X^{q-1} - X^{p-1}$.
De plus comme $p < q$ on a $\deg(X^{q-1} - X^{p-1}) = q - 1 < q = \deg(1 - X^q)$ et l'écriture précédent est donc bien la division euclidienne de $X^{q-1} - X^{p+q-1}$ par $1 - X^q$.
De plus on a $X^q - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_q}(X - \omega)$ et pour tout $\omega \in \mathbb{U}_q$ on a $\omega^{q-1} - \omega^{p-1} = \frac{1}{\omega}(1 - \omega^p)$.
Comme $p \wedge q = 1$ on a pour tout $\omega \in \mathbb{U}_q$, $\omega^p = 1$ ssi $\omega \in \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q = \{1\}$.
Ainsi les pôles de $\frac{X^{q-1} - X^{p+q-1}}{1 - X^q}$ sont exactement les $\omega \in \mathbb{U}_q\{1\}$ et ils sont tous simples.
Par décompositon en éléments simples il existe donc $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}}$ tels que

$$\frac{X^{q-1} - X^{p+q-1}}{1 - X^q} = X^{p-1} + \sum_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}} \frac{a_\omega}{X - \omega}.$$

Par la formule explicite pour un pôle simple on a de plus

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\},\ a_\omega = \frac{(X^{q-1} - X^{p+q-1})(\omega)}{(1 - X^q)'(\omega)}$$

c'est-à-dire pour tout $\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} a_\omega &= \frac{\omega^{q-1} - \omega^{p+q-1}}{-q\omega^{q-1}} \\ &= \frac{\omega^p - 1}{q} \end{aligned}$$

et on a donc bien

$$\boxed{\frac{X^{q-1} - X^{p+q-1}}{1 - X^q} = X^{p-1} + \frac{1}{q} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}} \frac{\omega^p - 1}{X - \omega}}.$$

1.9. En déduire, à l'aide d'un changement de variables, que

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{p}{q}}}{1 - t} \mathrm{d}t = \frac{q}{p} + \sum_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}} (\omega^p - 1) \int_0^1 \frac{1}{t - \omega} \mathrm{d}t.$$

La fonction $\begin{matrix} [0,1] \to [0,1] \\ s \mapsto s^q \end{matrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
En effectuant le changement de variables

- $t = s^q$
- $\mathrm{d}t = q s^{q-1} \mathrm{d}s$
- $t \in [0,1] \leftrightarrow s \in [0,1]$

on obtient (les fonctions sont prolongeables par continuité en 1)

$$\int_0^1 \frac{1 - s^p}{1 - s^q} q s^{q-1} \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{p}{q}}}{1 - t} \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{1 - t^x}{1 - t} \mathrm{d}t = q \int_0^1 \frac{s^{q-1} - s^{p+q-1}}{1 - s^q} \mathrm{d}s.$$

De plus par la question **1.8.** on a (la fraction rationnelle n'ayant aucun pôle dans $[0,1]$)

$$\forall s \in [0,1[],\ \frac{s^{q-1} - s^{p+q-1}}{1 - s^q} = s^{p-1} + \frac{1}{q} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}} \frac{\omega^p - 1}{s - \omega}.$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\mathrm{d}t = q\int_0^1 \left(s^{p-1} + \frac{1}{q}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \frac{\omega^p-1}{s-\omega}\right)\mathrm{d}s$$
$$= q\int_0^1 s^{p-1}\mathrm{d}s + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} (\omega^p-1)\int_0^1 \frac{1}{s-\omega}\mathrm{d}s.$$

et comme $\int_0^1 s^{p-1}\mathrm{d}s = \frac{1}{p}$, on en déduit que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{p}{q}}}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{q}{p} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} (\omega^p-1)\int_0^1 \frac{1}{s-\omega}\mathrm{d}s}.$$

1.10. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t = \ln(1-(1-\varepsilon)^q) - \ln(1-(1-\varepsilon)).$$

On a (décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$)

$$\frac{qX^{q-1}}{X^q-1} = \frac{1}{X-1} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \frac{1}{X-\omega}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \frac{1}{X-\omega} = \frac{qX^{q-1}}{X^q-1} - \frac{1}{X-1}$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on a donc

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{qt^{q-1}}{t^q-1}\mathrm{d}t + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{qt^{q-1}}{t^q-1}\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|t^q-1|\right)\right]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \ln(1-(1-\varepsilon)^q) - 0$$

De même

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|t-1|\right)\right]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \ln(1-(1-\varepsilon))$$

et donc on a bien

$$\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t = \ln(1-(1-\varepsilon)^q) - \ln(1-(1-\varepsilon))}.$$

1.IV. Un dernier calcul d'intégrale

1.11. Déduire de la question **1.10.** la valeur de

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^1 \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t.$$

On constate tout d'aborde que somme d'intégrale de fonctions continues, fonction de la borne supérieure, l'application

$$x \mapsto \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}} \int_0^x \frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t$$

est continue.
De plus pour ε au voisinage de 0^+ on a par la question **1.10.**

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1-\varepsilon\}}\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t &= \ln(1-(1-\varepsilon)^q)-\ln(\varepsilon)\\ &= \ln(1-(1-q\varepsilon)+o_{\varepsilon\to0}(\varepsilon))-\ln(\varepsilon)\\ &= \ln(\varepsilon(q+o_{\varepsilon\to0}(1)))-\ln(\varepsilon)\\ &= \ln(q)+o_{\varepsilon\to0}(1)\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t=\ln(q)}.$$

1.12. Soit $\theta\in]0,\pi[$.
Montrer que

$$\int_0^1\frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t=\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+i\frac{\pi-\theta}{2}$$

On a pour tout $t\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-e^{i\theta}} &= \frac{t-e^{-i\theta}}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2(t-\cos(\theta))}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}+i\frac{\sin(\theta)}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}+i\frac{\frac{1}{\sin(\theta)}}{\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}.\end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2(t-\cos(\theta))}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}\mathrm{d}t+i\int_0^1\frac{\frac{1}{\sin(\theta)}}{\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left((t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)\right)\right]_0^1+i\left[\arctan\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln\left((1-\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2\right)+i\left(\arctan\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)-\arctan\left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right)\end{aligned}$$

De plus

- On a

$$\begin{aligned}(1-\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2 &= 2-2\cos(\theta)\\ &= 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} &= \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

  et donc comme $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on en déduit que

$$\arctan\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)=\frac{\theta}{2}.$$

- On a

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\\ &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

et donc comme $\frac{\pi}{2}-\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on en déduit que

$$\arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}-\theta.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) + i\left(\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

et comme $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ on a donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t = \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}}.$$

Remarque: en fait (cf corrigé de la question suivante) le résultat reste correct

1.13. Conclure que

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = -\ln(2q) + \sum_{k=1}^{q-1}\left(\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(k\pi\frac{1}{q}\right)\right) + \sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)k\pi\frac{1}{q}\right)$$

Par la question **1.3.** on a

$$F(x) = F(x+1) - \frac{1}{x}$$

et donc par la question **1.7.** on a

$$F(x) = \int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x}.$$

Par la question **1.9.** on a donc

$$\begin{aligned}F\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{q}{p} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}(\omega^p-1)\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t - \frac{q}{p}\\ &= \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}\omega^p\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t - \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t\end{aligned}.$$

Donc par la question **1.11.** on a

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}\omega^p\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t - \ln(q).$$

De plus on a $F(p/q)\in\mathbb{R}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}F\left(\frac{p}{q}\right) &= \mathrm{Re}\left(F\left(\frac{p}{q}\right)\right)\\ &\quad -\ln(q) + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_q\setminus\{1\}}\mathrm{Re}\left(\omega^p\int_0^1\frac{1}{t-\omega}\mathrm{d}t\right)\\ &= -\ln(q) + \sum_{k=1}^{q-1}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ikp\pi}{q}}\int_0^1\frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Soit $k\in[\![1,q-1]\!]$, on a

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ikp\pi}{q}}\int_0^1\frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ikp\pi}{q}}\right)\mathrm{Re}\left(\int_0^1\frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right) - \mathrm{Im}\left(e^{\frac{2ikp\pi}{q}}\right)\mathrm{Im}\left(\int_0^1\frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right).$$

Or par la question **1.12.** on a

- Si $\theta \in]0,\pi[$,
$$\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t = \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}.$$
- Si $\theta = \pi$,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t &= \ln(2)\\ &= \ln\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\left(\frac{\pi-\pi}{2}\right)\end{aligned}$$
- si $\theta \in]\pi, 2\pi[$, comme $2\pi-\theta \in]0,\pi[$, on a
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i\theta}}\mathrm{d}t &= \overline{\int_0^1 \frac{1}{t-e^{i(2\pi-\theta)}}\mathrm{d}t}\\ &= \overline{\ln\left(2\sin\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-(2\pi-\theta)}{2}}\\ &= \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - i\frac{\pi-(2\pi-\theta)}{2}\\ &= \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

et donc dans tous les cas

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right) &= \ln\left(2\sin\left(\frac{k\pi}{q}\right)\right)\\ \mathrm{Im}\left(\int_0^1 \frac{1}{t-e^{\frac{2ik\pi}{q}}}\mathrm{d}t\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{q}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}F\left(\frac{p}{q}\right) &= -\ln(q) + \sum_{k=1}^{q-1}\left(\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{k\pi}{q}\right)\right) + \sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\left(\frac{k\pi}{q}-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= -\ln(q)\\ &+ \ln(2)\sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right) + \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{q}\right)\right)\\ &+ \sum_{k=1}^{q-1}\sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\frac{k\pi}{q} - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\end{aligned}$$

Enfin comme $p\wedge q = 1$ on a en particulier q ne divise pas p et donc

$$e^{\frac{2\pi p}{q}} \neq 1$$

d'où par somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi ikp}{q}} = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{q-1} e^{\frac{2\pi ikp}{q}} = -1$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right) &= -1\\ \sum_{k=1}^{q-1}\sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right) &= 0\end{aligned}$$

et donc on obtient bien finalement

$$\boxed{F\left(\frac{p}{q}\right) = -\ln(2q) + \sum_{k=1}^{q-1}\left(\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(k\pi\frac{1}{q}\right)\right) + \sin\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)k\pi\frac{1}{q}\right)}$$

Remarques:

- On pourrait en fait continuer le calcul !
  En effet les sommes de la forme

$$\sum_{k=1}^{q-1} k\sin(k\theta)$$

  se calculent (cf TDs) et de plus on observe que par parité on peut rassembler les termes k et $q-1-k$ (c'est d'ailleurs une autre façon de rédiger le passage à la partie réelle).
  On obtiendrait alors la *formule de Gauss* suivante

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = -\ln(2q) - \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\pi\frac{p}{q}\right)}{\sin\left(\pi\frac{p}{q}\right)} + 2\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{q-1}{2}\right\rfloor}\cos\left(2k\pi\frac{p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(k\pi\frac{1}{q}\right)\right)$$

- La fonction F a de nombreuses applications. Voir par exemple Wikipedia, la fonction usuelle ψ étant définie par $\psi = F - \gamma$ où γ est la constante d'Euler.

Si toutes ces remarques auraient pu permettre de faire un sujet complet sur cette fonction, on a préféré s'arrêter à la formule de Gauss, afin de faire deux problèmes.

Remarque de dernière minute: il se trouve qu'un problème proche vient de tomber au concours, cf *Mines-PC Mathématiques 2*.