Dénombrement et déterminant

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ces exercices sont issus d'un DM facultatif de l'année 2023–2024, dont le fil rouge est l'*interaction entre dénombrement et déterminant*. Dans le premier, on dénombre les matrices d'un déterminant donné à coefficients dans un corps fini ; dans le second, le déterminant sert au contraire d'outil pour évaluer une somme combinatoire sur le groupe symétrique. Les prérequis sont la théorie du déterminant (multilinéarité, déterminant d'une matrice diagonale, invariance par similitude), le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, les corps finis, le groupe symétrique et l'intégration des fonctions polynomiales.

---

1 Dénombrement de déterminants

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q.
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer

$$\mathrm{card}\left(\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}\right).$$

Indication: distinguer $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.

2 Où sont les déterminants et le dénombrement ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $\sigma \in S_n$ on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.
Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}.$$