En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ces exercices sont issus d'un DM facultatif de l'année 2023–2024, dont le fil rouge est l'*interaction entre dénombrement et déterminant*. Dans le premier, on dénombre les matrices d'un déterminant donné à coefficients dans un corps fini ; dans le second, le déterminant sert au contraire d'outil pour évaluer une somme combinatoire sur le groupe symétrique. Les prérequis sont la théorie du déterminant (multilinéarité, déterminant d'une matrice diagonale, invariance par similitude), le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, les corps finis, le groupe symétrique et l'intégration des fonctions polynomiales.

---

1 Dénombrement de déterminants

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q.
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer

$$\mathrm{card}\left(\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}\right).$$

Indication: distinguer $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.

- **Cardinal de** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
  On remarque tout d'abord que si $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension k, alors comme F est en bijection avec $\mathbb{K}^k$ on a $\mathrm{card}(F) = q^k$. D'où $\mathrm{card}(\mathbb{K}^n \backslash F) = q^n - q^k$.
  De plus construire une matrice inversible revient à construire une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (la famille de ses colonnes).
  Or une famille $(C_1, \dots, C_r)$ est libre ssi pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a $C_k \notin \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{k-1})$ (par récurrence).
  On a donc
  - $q^n - q^0$ choix pour C_1, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(\emptyset) = \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$,
  - $q^n - q^1$ choix pour C_2, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1)$ et comme (C_1) est libre $\dim \mathrm{Vect}(C_1) = 1$,
  - $q^n - q^2$ choix pour C_3, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et comme (C_1, C_2) est libre $\dim \mathrm{Vect}(C_1, C_2) = 2$,
  - $\cdots$
  - $q^n - q^{n-1}$ choix pour C_n, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1})$ et comme $(C_1, \dots, C_{n-1})$ est libre $\dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1}) = n - 1$.

  Au total on a donc

  $$\mathrm{card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = (q^n - q^0)(q^n - q^1) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

  ou encore

  $$\boxed{\mathrm{card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^k}\right).}$$

- **Cas** $\alpha = 0$
  Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\det(A) = 0$ ssi $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
  Comme $\mathrm{card}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})) = q^{n^2}$ (c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2), on a donc

  $$\boxed{\mathrm{card}\left(\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}\right) = q^{n^2}\left(1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)\right).}$$

- **Cas** $\alpha \neq 0$
  Notons $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}$.
  Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{K}^*)^2$ on a $\mathrm{card}(\mathcal{D}_\alpha) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_\beta)$.
  En effet avec

  $$D_{\beta \to \alpha} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  on a $\det(D_{\beta \to \alpha}) = \alpha\beta^{-1}$ d'où

  $$\begin{aligned} \mathcal{D}_\beta &\to \mathcal{D}_\alpha \\ M &\mapsto D_{\beta \to \alpha} M \end{aligned}$$

est bien définie, et bijective car de bijection réciproque $M \mapsto D_{\alpha\to\beta}M$ (où $D_{\alpha\to\beta} = D_{\beta\to\alpha}^{-1}$).
Par conséquent, comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est la réunion **disjointe** des $\mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{K}^*$ (il y a $q-1$ valeurs possibles pour le déterminant d'une matrice inversible), on a par la formule des bergers

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{card}(\mathcal{D}_\alpha) = \frac{1}{q-1}\,\mathrm{card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$$

c'est à dire pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$,

$$\boxed{\mathrm{card}\left(\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}\right) = \frac{q^{n^2}}{q-1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q^k}\right).}$$

2 Où sont les déterminants et le dénombrement ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $\sigma \in S_n$ on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.
Calculer

$$\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}.$$

- **On se ramène à une fonction génératrice**
  Définissons

$$f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)x^{N(\sigma)}.\end{array}$$

  (En fait on pourrait même définir $P = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)X^{N(\sigma)} \in \mathbb{R}[X]$.)
  Alors f est continue (fonction polynomiale) et

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\int_0^1 x^{N(\sigma)}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}.\end{aligned}$$

  On cherche donc à calculer une expression plus simple de f.
  (De manière générale, en combinatoire, pour calculer des sommes de la forme $\sum ka_k$ ou $\sum \frac{1}{k+1}a_k$ on introduit souvent la fonction génératrice $x \mapsto \sum a_k x^k$.)
- **La fonction génératrice est un déterminant**
  Posons pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

  alors par formule explicite du déterminant,

$$\Delta_n(x) = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$$

  où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = x$.
  D'où pour tout $\sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = x^{N(\sigma)} \times 1^{n-N(\sigma)}$.
  Donc

$$f(x) = \Delta_n(x).$$

- **Calcul du déterminant**
  En notant

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

on a $\Delta_n(x) = \det((x-1)I_n + J)$.
Or J est de rang 1 (toutes les colonnes sont colinéaires et non nulles) et de trace $n \neq 0$.
Donc (à refaire si nécessaire), $J \sim \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $(x-1)I_n + J \sim \begin{pmatrix} x-1+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}$ et par conséquent (le déterminant est un invariant de similitude et déterminant d'une matrice diagonale),

$$\Delta_n(x) = ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}.$$

- **Conclusion**
On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \Delta_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x-1)^n\mathrm{d}x + n\int_0^1 (x-1)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + n\left[\frac{(x-1)^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{0-(-1)^{n+1}}{n+1} + n \times \frac{0-(-1)^n}{n} \\ &= (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}}.$$