Décomposition de Fitting

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

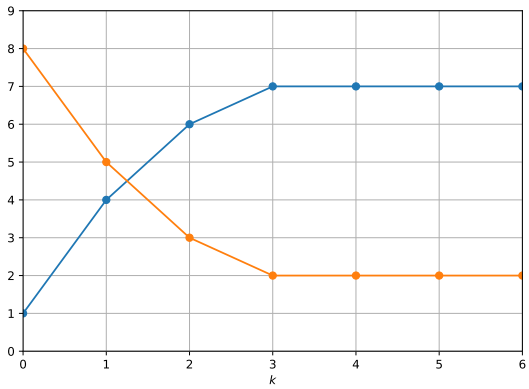
Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet effectue quelques calculs classiques sur les noyaux et images itérées d'endomorphismes.
Plus précisément:

- La première partie 1.I traite d'un cas particulier.
- La seconde partie 1.II caractérise la stationnarité des suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
- La troisième partie 1.III traite, dans le cas stationnaire, de la décomposition dite de «Fitting» de u en blocs nilpotents et inversibles.
- La quatrième partie 1.IV présente un exemple non stationnaire.

Il s'agit de premiers résultats classiques sur de tels itérations. D'autres résultats seront vus à l'aide des outils de la théorie de la dimension.



---

1. Classique: Un peu de noyaux et images itérées

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel (non nul).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1.I. Petits cas

1.1. Expliciter I_0, N_0, I_1 et N_1.

On suppose dans les trois questions suivantes que $I_2 = I_1$ et $N_2 = N_1$.
On cherche à montrer que, dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

1.2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
1.3. Montrer $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.
1.4. Conclure.

1.II. Itérations et cas stationnaires

1.5. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, c'est à dire montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k.$$

On notera dans la suite du problème:

$$\mathcal{I} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

et

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k.$$

☢*Attention aux unions: ici l'usage d'une union dans un problème d'algèbre linéaire est tout à fait justifié (car il s'agit d'une union croissante). Mais ne pas manipuler des unions dans un contexte linéaire sans précaution.*
D'ailleurs, plutôt qu'une union on peut plutôt voir $\mathcal{N}$ comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ou encore comme la "limite" (au sens de supremum d'une suite croissante de sevs) de la suite des $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1.6. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont des sevs de E.

On cherche désormais à caractériser la stationnarité de ces suites.

1.7. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k_0 **ssi** $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.
1.8. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k_0 **ssi** $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.

On suppose dans le reste de la partie que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux stationnaires à partir d'un certain rang. On cherche à montrer que dans ce cas $\mathcal{N} \oplus \mathcal{I} = E$ et que le plus petit rang à partir duquel les suites sont stationnaire est commun aux deux suites.
On pose alors

$$p = \min\left(\{k \in \mathbb{N} | N_k = N_{k+1}\}\right),$$
$$q = \min\left(\{k \in \mathbb{N} | I_k = I_{k+1}\}\right).$$

1.9. Expliquer brièvement pourquoi p et q sont bien définis et $\mathcal{N} = N_p$, $\mathcal{I} = I_q$.
1.10. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_k \cap I_p = \{0_E\}.$$

1.11. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k + N_q = E.$$

1.12. Montrer que $E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{I}$.
1.13. Soient F, S , $\widetilde{S}$ trois sevs de E.
Montrer que **si** F et S sont en somme directe, et $F + \widetilde{S} = E$, et $\widetilde{S} \subset S$ **alors** $\widetilde{S} = S$.
1.14. Montrer que $p = q$.

1.III. Décomposition de Fitting

1.15. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont stables par u.

On suppose dans les questions suivantes que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux stationnaires à partir d'un certain rang (même hypothèse que dans la partie 1.II)

1.16. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{N}$, noté $u_{\mathcal{N}}$, est nilpotent.
1.17. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{I}$, noté $u_{\mathcal{I}}$ est inversible.

1.IV. Un exemple non stationnaire

Dans cette partie on considère $E = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ de dérivation, défini par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P'.$$

1.18. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k.
1.19. Que dire de la stationnarité éventuelle des suites $(N_k)_{kk\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
1.20. Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{I}$.
1.21. Que dire des endomorphismes induits $u_{\mathcal{N}}$ et $u_{\mathcal{I}}$?