Corrigé du Décomposition de Fitting

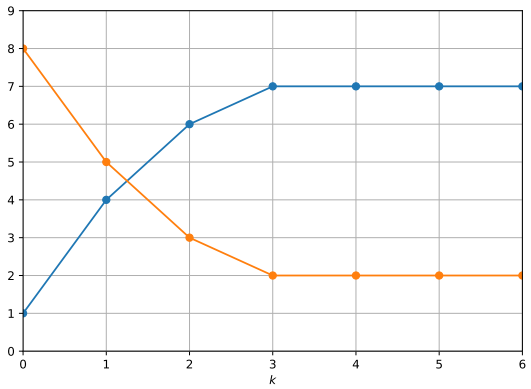
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet effectue quelques calculs classiques sur les noyaux et images itérées d'endomorphismes.
Plus précisément:

- La première partie 1.I traite d'un cas particulier.
- La seconde partie 1.II caractérise la stationnarité des suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
- La troisième partie 1.III traite, dans le cas stationnaire, de la décomposition dite de «Fitting» de u en blocs nilpotents et inversibles.
- La quatrième partie 1.IV présente un exemple non stationnaire.

Il s'agit de premiers résultats classiques sur de tels itérations. D'autres résultats seront vus à l'aide des outils de la théorie de la dimension.



---

1. Classique: Un peu de noyaux et images itérées

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel (non nul).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1.I. Petits cas

1.1. Expliciter I_0, N_0, I_1 et N_1.

- Comme $u^0 = Id_E$ on a $\boxed{I_0 = E}$ et $\boxed{N_0 = \{0_E\}}$.
- De plus $\boxed{I_1 = \mathrm{Im}(u)}$ et $\boxed{N_1 = \mathrm{Ker}(u)}$.

On suppose dans les trois questions suivantes que $I_2 = I_1$ et $N_2 = N_1$.
On cherche à montrer que, dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Remarque: les méthodes pour répondre à cette question (et en fait le reste du problème) sont très classique peuvent sembler nouvelles. N'hésitez pas à me demander de l'expliquer en détails au tableau.

1.2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.

- On a $0_E \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
- Soit $y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
  Alors par définition du noyau $u(y) = O_E$ et par définition de l'image il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ (fixons le).
  Alors $u^2(x)u(u(x)) = 0_E$, c'est à dire $x \in N_2$.
  De plus $N_2 = N_1$. Donc $x \in N_1$ c'est à dire $u(x) = 0$. Donc $y = 0$.

On a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}}.$$

1.3. Montrer $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

On a tout d'abord $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) \subset E$.
Soit $x \in E$. On procède par analyse synthèse pour écrire $\xi = k + y$ avec $z \in \mathrm{Ker}(u)$ et $y \in \mathrm{Im}(u)$.

- **Analyse**
  Supposons qu'il existe k et y tels que

$$x = \underbrace{z}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{y}_{\in \mathrm{Im}(u)}$$

c'est à dire, par définition de l'image, supposons qu'il existe z et ξ tels que

$$x = \underbrace{z}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + u(\xi).$$

Alors par linéarité de u on a

$$u(x) = u(z) + u(u(\xi))$$

c'est à dire par définition du noyau

$$u(x) = u(u(\xi))$$

ce qui permet de déterminer un tel ξ.

- **Synthèse**
  On a $u(x) \in I_1$. De plus $I_1 = I_2$. Donc $u(x) \in I_2$ c'est à dire qu'il existe un $\xi \in E$ tel que $u(u(\xi)) = u(x)$ (fixons le). Alors $u(\xi) \in \mathrm{Im}(u)$.
  En posant $z = x - u(\xi)$ on a alors $u(z) = u(x) - u(u(\xi)) = 0_E$ et donc $z \in \mathrm{Ker}(u)$.
  Et $x = z + u(\xi)$.

On a donc bien exhibé $(z, y) \in \mathrm{Ker}(u) \times \mathrm{Im}(u)$ tels que $x = z + y$.
On a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E}$$

1.4. Conclure.

D'après les deux questions précédentes et la caractérisation de la somme directe de deux sevs par leur intersection on a donc bien

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u).$$

1.II. Itérations et cas stationnaires

1.5. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, c'est à dire montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On a $u^{k+1} = u \circ u^k$.
  Donc pour tout $x \in E$, si $u^k(x) = 0_E$, alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$. Ce qui signifie que

  $$\boxed{N_k \subset N_{k+1}}.$$

- On a $u^{k+1} = u^k \circ u$.
  Donc pour tout $y \in E$, si il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$, alors $y = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) =$ et donc il existe ξ tel que $y = u^k(\xi)$. Ce qui signifie que

  $$\boxed{I_{k+1} \subset I_k}.$$

On notera dans la suite du problème:

$$\mathcal{I} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

et

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k.$$

☢*Attention aux unions: ici l'usage d'une union dans un problème d'algèbre linéaire est tout à fait justifié (car il s'agit d'une union croissante). Mais ne pas manipuler des unions dans un contexte linéaire sans précaution.*
D'ailleurs, plutôt qu'une union on peut plutôt voir $\mathcal{N}$ comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ou encore comme la "limite" (au sens de supremum d'une suite croissante de sevs) de la suite des $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1.6. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont des sevs de E.

On va montrer qu'il s'agit de sevs de E et donc d'espaces vectoriels.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, I_k est un sev de E comme image d'une application linéaire, et une intersection de sevs étant un

sev on en déduit directement que

$$\boxed{\mathcal{I} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^k) \text{ est un sev de } E}.$$

- Comme $0_E \in N_0$ on a $0_E \in \mathcal{N}$. Il faut ensuite montrer que $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathcal{N}$ et λ_1, λ_2 deux scalaires.
  Par définition de $\mathcal{N}$ il existe k_1 et k_2 deux entiers tels que $x_1 \in N_{k_1}$ et $x_2 \in N_{k_2}$.
  Posons $\kappa = \max(k_1, k_2)$. Par croissance de $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a alors $x_1 \in N_{k_1} \subset N_\kappa$ et $x_2 \in N_{k_2} \subset N_\kappa$. Comme N_κ est un sev, on a alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in N_\kappa$.
  Et donc, en particulier, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{N}$.
  Donc

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sev de } E.}$$

On cherche désormais à caractériser la stationnarité de ces suites.

1.7. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k_0 **ssi** $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.

On procède par double équivalence.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si la suite est stationnaire à partir d'un rang k_0 alors en particulier $\boxed{N_{k_0+1} = N_{k_0}}$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0+1} = N_{k_0}$ (et fixons-le). Montrons que la suite est en fait stationnaire à partir du rang k_0.
  Plus précisément montrons par récurrence sur $k \geq k_0$ que $N_k = N_{k_0}$.
  ▷ **Initialisation:** On a bien $N_{k_0} = N_{k_0}$.
  ▷ **Hérédité:** Soit $k \geq k_0$ et supposons $N_k = N_{k_0}$.
  Tout d'abord on a $N_{k_0} \subset N_{k+1}$ par croissance des noyaux itérés (et car $k_0 \leq k+1$).
  Soit $z \in N_{k+1}$. Alors $u^{k+1}(z) = 0_E$, c'est à dire $u^k(u(z)) = 0$.
  Donc $u(z) \in N_k$.
  Par hypothèse de récurrence on en conclut donc que $u(z) \in N_{k_0}$ c'est à dire $u^{k_0+1}(z) = 0$, c'est à dire $z \in N_{k_0+1}$.
  Mais par définition de k_0, on a $N_{k_0+1} = N_{k_0}$ donc $z \in N_{k_0}$.
  On a donc bien montré que $N_{k_0} = N_{k+1}$.
  ▷ **Conclusion:** la propriété est vraie à partir du rang k_0 et héréditaire,

$$\boxed{\forall k \geq k_0,\ N_k = N_{k_0}}.$$

1.8. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k_0 **ssi** $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.

On procède par double équivalence.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si la suite est stationnaire à partir d'un rang k_0 alors en particulier $\boxed{I_{k_0+1} = I_{k_0}}$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_{k_0+1} = I_{k_0}$ (et fixons-le). Montrons que la suite est en fait stationnaire à partir du rang k_0.
  Plus précisément montrons par récurrence sur $k \geq k_0$ que $I_k = I_{k_0}$.
  ▷ **Initialisation:** On a bien $I_{k_0} = I_{k_0}$.
  ▷ **Hérédité:** Soit $k \geq k_0$ et supposons $I_k = I_{k_0}$.
  Tout d'abord on a $I_{k_0} \supset I_{k+1}$ par décroissance des images itérées (et car $k_0 \leq k+1$).
  Soit I_{k_0}. Par définition de k_0 on a alors $y \in I_{k_0+1}$ et donc il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k_0+1}(x) = u(u^{k_0}(x))$.
  De plus par hypothèse de récurrence $I_{k_0} = I_k$ d'où $u^{k_0}(x) \in I_k$, c'est à dire il existe $\xi \in E$ tel que $u^{k_0}(x) = u^k(\xi)$.
  Et donc $y = u(u^k(\xi)) = u^{k+1}(\xi)$.
  On a donc bien montré que $I_{k_0} = I_{k+1}$.
  ▷ **Conclusion:** la propriété est vraie à partir du rang k_0 et héréditaire,

$$\boxed{\forall k \geq k_0,\ I_k = I_{k_0}}.$$

On suppose dans le reste de la partie que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux stationnaires à partir d'un certain rang. On cherche à montrer que dans ce cas $\mathcal{N} \oplus \mathcal{I} = E$ et que le plus petit rang à partir duquel les suites sont stationnaire est commun aux deux suites.
On pose alors

$$p = \min\left(\{k \in \mathbb{N} | N_k = N_{k+1}\}\right),$$
$$q = \min\left(\{k \in \mathbb{N} | I_k = I_{k+1}\}\right).$$

1.9. Expliquer brièvement pourquoi p et q sont bien définis et $\mathcal{N} = N_p$, $\mathcal{I} = I_q$.

- Les entiers p et q sont bien définis comme minimums d'ensembles d'entiers non vides.
- De plus comme $N_p = N_{p+1}$, on a (cf question **1.7.**)pour tout $k \geq p$, $N_k = N_p$ et donc en particulier $N_k \subset N_p$.
  Et, par **1.5.**, pour tout $k \leq p$, $N_k \subset N_p$.
  Et par conséquent $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k = N_p$ (en effet $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \supset N_p$ et pour tout k, $N_k \subset N_p$ d'où $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \subset N_p$).
  Donc $\boxed{\mathcal{N} = N_p}$.
- De même, comme $I_q = I_{q+1}$, on a (cf question **1.8.**)pour tout $k \geq q$, $I_k = I_q$ et donc en particulier $I_k \supset I_q$.
  Et, par **1.5.**, pour tout $k \leq q$, $I_k \supset I_q$.
  Et par conséquent $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = I_q$ (en effet $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \subset I_q$ et pour tout k, $I_k \supset I_q$ d'où $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \supset I_q$).
  Donc $\boxed{\mathcal{I} = I_q}$.

1.10. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_k \cap I_p = \{0_E\}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Tout d'abord $0_E \in N_k \cap I_p$ car il s'agit d'une intersection de sevs.
Soit $x \in N_k \cap I_p$.
Comme $x \in I_p$, il existe $\xi \in E$, tel que $x = u^p(\xi)$ (fixons le).
Comme $x \in N_k$, $u^k(x) = 0_E$.
Par conséquent $u^k(u^p(\xi)) = 0$ c'est à dire $u^{k+p}(\xi) = 0_E$ c'est à dire $\xi \in N_{k+p}$.
Et comme $N_{k+p} = N_p$ (par stationnarité des noyaux à partir du rang p) on en déduit que $\xi \in N_p$ c'est à dire $u^p(\xi) = 0_E$.
Donc $x = 0_E$.
On a donc bien

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, N_k \cap I_p = \{0_E\}}.$$

1.11. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k + N_q = E.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in E$.
On procède par analyse-synthèse pour déterminer $y \in I_k$ et $z \in N_q$ tels que $x = y + z$.

- **Analyse**
  Supposons que $x = y + z$ avec $y \in I_k$ et $z \in N_q$.
  Par définition de I_k il existe $\xi \in E$ tel que $y = u^k(\xi)$.
  D'où
  $$x = u^k(\xi) + z.$$
  Par défintion de N_q on a $u^q(z) = 0_E$ et donc l'égalité précédente et la linéarité de u^q permettent d'obtenir
  $$u^q(x) = u^q(u^k(\xi)) + 0_E$$
  c'est à dire
  $$u^q(x) = u^{q+k}(\xi).$$
- **Synthèse**
  On a $u^q(x) \in I_q$ par définition. De plus (par stationnarité des images à partir du rang q) on a $I_q = I_{k+q}$. Donc $u^q(x) \in I_{k+q}$ c'est à dire qu'il existe $\xi \in E$ tel que $u^q(x) = u^{q+k}(\xi)$ (fixons le).
  Posons $y = u^k(\xi)$ et $z = x - y$.
  Alors
  ▷ $x = y + z$ (par définition de z),
  ▷ $y \in I_k$ (par définition de y),
  ▷ $u^q(z) = u^q(x) - u^q(y) = u^q(x) - u^{k+q}(\xi) = O_E$ (par définition de ξ) et donc $z \in N_q$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, I_k + N_q = E}.$$

1.12. Montrer que $E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{I}$.

Des question **1.10.** et **1.11.**, en prenant $k = p$ dans la première égalité et $k = q$ dans la seconde on obtient

$$\begin{array}{l} \mathcal{N} \cap I_p = \{0_E\} \\ \mathcal{I} + N_q = E \end{array}.$$

De plus:

- comme $I_p \supset \mathcal{I}$ on en déduit
  $$\{0_E\} \supset \mathcal{N} \cap \mathcal{I}$$

l'inclusion réciproque étant évidemment vérifiée (intersection de sevs) on en déduit

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{I} = \{0_E\}.$$

- comme $N_p \subset \mathcal{N}$ on en déduit
$$E \subset \mathcal{I} + \mathcal{N}$$
l'inclusion réciproque étant évidemment vérifiée on en déduit
$$\mathcal{I} + \mathcal{N} = E.$$

Et donc, par caractérisation par l'intersection de la somme directe de deux sevs revient à

$$\boxed{\mathcal{N} \oplus \mathcal{I} = E}.$$

1.13. Soient F, S , $\widetilde{S}$ trois sevs de E.
Montrer que **si** F et S sont en somme directe, et $F + \widetilde{S} = E$, et $\widetilde{S} \subset S$ **alors** $\widetilde{S} = S$.

Soit $x \in S$. Comme $E = F + \widetilde{S}$, il existe $(f, s) \in F \times \widetilde{S}$ tels que $x = f + s$. De plus par l'inclusion on a aussi $x = f + s$ avec $(f, s) \in F \times S$. Or par la somme directe de F et S et comme de plus $x = 0 + x$ avec $(0_E, x) \in F \times S$ on déduit (unicité) que $f = 0_E$ et $x = s$. Et donc $x \in \widetilde{S}$. On a donc montré $S \subset \widetilde{S}$ d'où l'égalité.

1.14. Montrer que $p = q$.

- On a vu à la question précédente que
$$\mathcal{I} + \mathcal{N} = E$$
et
$$\mathcal{N} \cap I_p = \{0_E\}$$
et de plus on a
$$\mathcal{I} \subset I_p.$$
Donc par **1.13.**,
$$\mathcal{I} = I_p.$$
Mais donc en particulier $\mathcal{I} \subset I_{p+1} \subset I_p \subset \mathcal{I}$ d'où $I_{p+1} = I_p$ et
$$\boxed{p \geq q}.$$
- On a vu à la question précédente que
$$\mathcal{I} \cap \mathcal{N} = \{0_E\}$$
et
$$\mathcal{I} + N_q = E$$
et de plus on a
$$N_q \subset \mathcal{N}.$$
Donc par **1.13.**,
$$\mathcal{N} = N_q.$$
Mais donc en particulier $\mathcal{N} \subset N_q \subset N_{q+1} \subset \mathcal{N}$ d'où $N_q = N_{q+1}$ et
$$\boxed{q \geq p}.$$

On a donc bien $\boxed{p = q}$.

1.III. Décomposition de Fitting

1.15. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont stables par u.

- Soit $y \in \mathcal{I}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si $k = 0$, alors $u(y) \in I_0 = E$.
Si $k \geq 1$, comme $y \in \mathcal{I}$, en particulier $y \in I_{k-1}$, $u(y) \in u(I_{k-1}) = I_k$.
D'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $u(y) \in I_k$.
D'où $u(y) \in \mathcal{I}$.
Donc $\boxed{\mathcal{I} \text{ est stable par } u}$.

- Soit $x \in \mathcal{N}$.
  Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in N_k$ (fixons en un).
  Si $k = 0$ alors $x = 0_E$ d'où $u(x) = 0_E \in N_0$.
  Si $k > 0$ alors $u^{k-1}(u(x)) = u^k(x) = 0_E$. D'où $u(x) \in N_{k-1}$.
  Donc $u(x) \in \mathcal{N}$.
  Donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ stable par } u}$.

On suppose dans les questions suivantes que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux stationnaires à partir d'un certain rang (même hypothèse que dans la partie 1.II)

1.16. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{N}$, noté $u_{\mathcal{N}}$, est nilpotent.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N} = N_p$.
Soit $x \in N_p$.
Alors $u^p(x) = 0_E$.
Donc $(u_{N_p})^p = 0_{\mathcal{L}(N_p)}$.
Donc $\boxed{u_{\mathcal{N}} \text{ est nilpotent.}}$

1.17. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{I}$, noté $u_{\mathcal{I}}$ est inversible.

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{I} = I_q$.
- **Surjectivité**
  Soit $y \in I_q$.
  Comme $I_q = I_{q+1}$ il existe $\xi \in E$ tel que $y = u^{q+1}(\xi)$.
  En particulier $y = u(u^q(\xi))$ et comme $u^q(\xi) \in I_q$ on en déduit que $y \in \mathrm{Im}(u_{I_q})$.
  Donc $\boxed{u_{\mathcal{I}} \text{ est surjective.}}$
- **Injectivité**
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(u_{\mathcal{I}})$.
  Alors $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathcal{I} \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{I}$.
  Mais comme $\mathcal{N} \cap \mathcal{I} = \{0_E\}$ on en déduit que $x = 0_E$.
  Donc $\boxed{u_{\mathcal{I}} \text{ est injective.}}$

1.IV. Un exemple non stationnaire

Dans cette partie on considère $E = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ de dérivation, défini par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P'.$$

1.18. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k.

On a $N_0 = \{0_E\}$ et $I_0 = E$.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k = \mathbb{K}_{k-1}[X]$ et $I_k = E$.
- ▶ **Initialisation:** Pour $k = 1$, $N_1 = \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{K}_0[X]$ et $I_1 = \mathrm{Im}(u) = E$.
- ▶ **Hérédité:** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $N_k = \mathbb{K}_{k-1}[X]$ et $I_k = E$.
  On a $N_{k+1} = \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k \circ u) = u^{-1}(\mathrm{Ker}(u^k)) = u^{-1}(\mathbb{K}_{k-1}[X]) = \mathbb{K}_k[X]$.
  Et $I_{k+1} = \mathrm{Im}(u^{k+1}) = \mathrm{Im}(u \circ u^k) = u(\mathrm{Im}(u^k)) = E$.
- ▶ **Conclusion:** la propriété est vraie au rang k et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{I_k = E,\ N_k = \mathbb{K}_{k-1}[X]}.$$

1.19. Que dire de la stationnarité éventuelle des suites $(N_k)_{kk\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

La suite $\boxed{(I_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire}}$ (car constante) tandis que la suite $\boxed{(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas stationnaire}}$.

1.20. Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{I}$.

On a comme $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante,

$$\boxed{\mathcal{I} = \mathbb{K}[X]}.$$

De plus comme tout polynôme admet un degré, $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$.
Donc

$$\boxed{\mathcal{N} = \mathbb{K}[X]}.$$

1.21. Que dire des endomorphismes induits $u_{\mathcal{N}}$ et $u_{\mathcal{I}}$?

On a $u = u_{\mathcal{N}} = u_{\mathcal{I}}$.
Et $\boxed{u \text{ n'est ni inversible ni nilpotent}}$.
En effet $u(1) = 0$ d'où la non inversibilité et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(X^n) \neq 0$ d'où la non nilpotence.
D'où l'importance de l'hypothèse de stationnarité des deux suites de sevs dans la partie précédente.