Deux preuves du théorème de d'Alembert-Gauss

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Le théorème de d'Alembert Gauss, aussi appelé Théorème Fondamental de l'Algèbre, possède de nombreuses démonstrations. Ces démonstrations ont en commun un point remarquable: elle nécessitent toutes un argument issu de l'étude des fonctions réelles. On classifie souvent ces preuves en trois catégories arbitraires:

- Les preuves «d'analyse». Par exemple utilisant les propriétés des fonctions complexes suffisamment régulières.
- Les preuves «algébrique». Par exemple en utilisant des structures algébriques sur le corps des nombres complexes.
- Les preuves «topologique». Par exemple utilisant des décomptes d'indices de lacets dans le plan complexe.

All proofs below involve some mathematical analysis, or at least the topological concept of continuity of real or complex functions. Some also use differentiable or even analytic functions. This requirement has led to the remark that the Fundamental Theorem of Algebra is neither fundamental, nor a theorem of algebra.

Wikipedia

On propose dans ce devoir deux preuves.

- Le premier problème démontre le théorème de d'Alembert–Gauss par la méthode dite de d'Alembert, en estimant des minimum de fonctions polynomiales sur des disques.
- Le second problème démontre le théorème de d'Alembert–Gauss par une méthode dite de Laplace, en procédant par une récurrence bien choisie sur le degré.
- Pour un aperçu d'une troisième méthode de preuve, utilisant les indices de Cauchy de suites de Sturm voir par exemple [3].

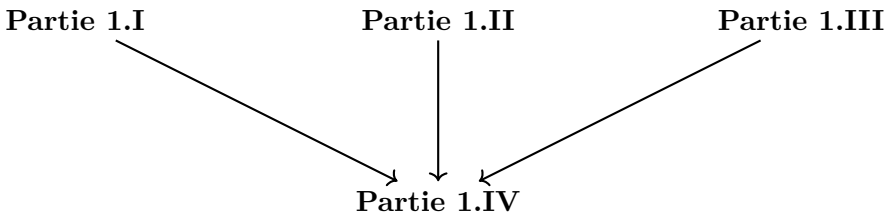
---

1. Une preuve d'analyse: méthode de d'Alembert par inégalité d'Argand

Une première famille de preuve utilise les propriétés des fonctions complexes sur $\mathbb{C}$, via par exemple l'étude de leurs extrema.
La preuve suivante, très classique (voir par exemple [1]) montre que le module d'un polynôme non constant admet un minimum sur toute boule fermée centrée autour d'un point, qu'il n'existe pas de minimum local à l'intérieur d'une telle boule en dehors des racines, ce qui par existence d'un minimum global entraîne l'existence d'une racine.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $B(\alpha, r)$ la boule fermée de centre α et de rayon r c'est à dire

$$B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leq r\}.$$

Dans la suite $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Les parties 1.I, 1.II, 1.III sont indépendantes.
La partie 1.IV utilise les résultats démontrés dans les parties précédentes.
On pourra bien évidemment admettre les résultats d'une partie dans les autres parties.



1.I. Théorème des Bornes Atteintes

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

> Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
> Il existe $\beta \in B(\alpha, r)$ tel que, pour tout $z \in B(\alpha, r)$, $|P(z)| \geq |P(\beta)|$.

Autrement dit le module de P admet un minimum sur tout boule fermée.
On fixe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
1.1. Montrer que pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (B(\alpha, r))^{\mathbb{N}}$ il existe une extractrice φ et $\beta \in B(\alpha, r)$ tels que

$$z_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta.$$

1.2. En s'inspirant de la preuve du théorème des bornes atteintes, conclure.

1.II. Croissance des polynômes en l'infini

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

> Pour tout $A > 0$ existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq r \Rightarrow |P(z)| \geq A$.

Autrement dit que le module de $P(z)$ tend vers $+\infty$ lorsque le module de z tend vers $+\infty$.
1.3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(0) = 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$P(z) = \lambda z^n \left(1 + Q\left(z^{-1}\right)\right).$$

1.4. Conclure.

1.III. Inégalité d'Argand

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

> Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) \neq 0$.
> Pour tout $r > 0$ il existe $\xi \in B(\alpha, r)$ tel que $|P(\xi)| < |P(\alpha)|$.

Autrement dit le minimum du module de P n'admet pas de minimum local en tout point différent d'une racine.
1.5. Montrer qu'il existe $m \in [\![1, n]\!]$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $R \in \mathbb{C}_{n-m}[X]$ vérifiant $R(0) = 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = P(0) + \mu z^m (1 + R(z)).$$

1.6. Soit $\eta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$,

$$\left|1 + \eta r^m \left(1 + R(re^{i\theta})\right)\right| < 1$$

1.7. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\mu}{P(0)}(e^{i\theta})^m \in \mathbb{R}_-^*.$$

1.8. Conclure dans le cas $\alpha = 0$ et $r = 1$.
1.9. Conclure dans le cas général.

1.IV. Conclusion

1.10. En utilisant les résultats des parties 1.I, 1.II et 1.III montrer que P admet une racine complexe.

2. Une preuve algébrique: méthode de Laplace par vecteurs propres

Une autre famille de preuves, utilise la structure du corps des nombres complexe, et démontre que pour tout corps $\mathbb{K}$, si
- tout polynôme de degré impair de $\mathbb{K}[X]$ admet une racine
- tout scalaire admet une racine carrée

alors par récurrence sur la valuation 2-adique du degré, tout polynôme admet une racine.
La preuve suivante, s'inspirant d'un article de Derksen [2], propose une approche en termes d'algèbre linéaire d'une telle méthode.
Dans la suite $\mathbb{K}$ est un corps (tel que $2 \neq 0$).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E\backslash\{0\}$ est **vecteur propre** de u ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u c'est à dire ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce sujet on dira de plus que:
- E vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$ ssi pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un vecteur propre
- E vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$ ssi pour tous $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ endomorphismes de E qui **commutent**, u_1 et u_2 admettent un vecteur propre **commun**

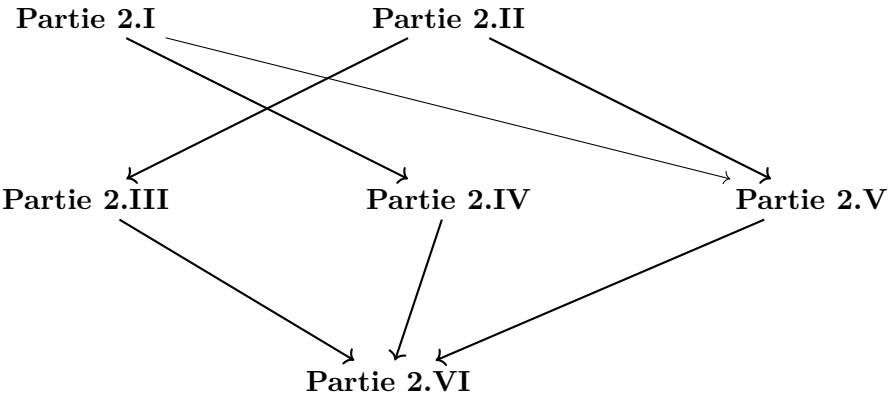
et pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$ la proposition

$$\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k) : \quad \text{«tout } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension finie vérifiant } \nu_2(\dim(E)) \leq k, \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}_1\text{»}$$

et $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ la proposition

$$\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k) : \quad \text{«tout } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension finie vérifiant } \nu_2(\dim(E)) \leq k, \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}_2\text{»}$$

On pourra bien évidemment admettre les résultats d'une partie dans les autres parties.



2.I. Un lien vers les racines de polynômes

On commence par exhiber un lien (parmi de nombreux autres, cf cours de deuxième année) entre les vecteurs propres d'endormorphismes et les racines de polynômes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire et $\mathcal{C}_P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sa matrice compagnon définie par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2.1. Soit $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Expliciter $(\mathcal{C}_P) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Montrer que

$$\mathcal{C}_P \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], & x_{k-1} = \lambda x_k + a_k x_{n-1} \\ & P(\lambda) x_{n-1} = 0. \end{cases}$$

2.3. En déduire que l'application linéaire canoniquement associée à $\mathcal{C}_P$ admet un vecteur propre **ssi** P admet une racine dans $\mathbb{K}$.

2.II. Équivalence entre deux propositions

On cherche à montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k) \Leftrightarrow \mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ (et on pourrait, par récurrence, montrer l'équivalence avec l'existence d'un vecteur propre commun à toute famille finie d'endomorphismes qui commutent).
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

2.4. Montrer que $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k) \Rightarrow \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$.

On suppose désormais $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$ et on cherche à montrer $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$
Dans les questions **2.5.** à **2.8.** on fixe fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini tel que $\nu_2(\dim(E)) \leq k$ ainsi que $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent.

2.5. Que dire si u_1 est une homothétie ? On suppose désormais que u_1 n'est pas une homothétie.

2.6. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u_1 - \lambda \operatorname{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \cup \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

On pose

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(u_1 - \lambda \operatorname{Id}_E) \quad , \quad F_\lambda = \operatorname{Im}(u_1 - \lambda \operatorname{Id}_E).$$

2.7. Montrer que
- E_λ **et** F_λ sont stables par u_1 et u_2
- $(u_1)_{E_\lambda}$ et $(u_2)_{E_\lambda}$ commutent **et** $(u_1)_{F_\lambda}$ et $(u_2)_{F_\lambda}$ commutent

2.8. Montrer que
- E_λ **et** F_λ sont de dimensions comprises entre 1 et $\dim(E) - 1$
- $\nu_2(\dim(E_\lambda)) \leq k$ **ou** $\nu_2(\dim(F_\lambda)) \leq k$

2.9. Conclure par une récurrence bien choisie.

2.III. Hérédité

Dans cette partie on suppose que le corps $\mathbb{K}$ possède la propriété suivante

$$\forall \Delta \in \mathbb{K},\ X^2 - \Delta \text{ admet une racine} \qquad (\blacksquare)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ et on cherche à montrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1)$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n tel que $\nu_2(n) = k+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on pose

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

On rappelle que $A_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ c'est à dire $A_n(\mathbb{K}) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) | B^\top = -B\}$.

2.10. Montrer que **si** il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AB = \lambda B$ **alors** u admet un vecteur propre.

On définit $\Xi_0, \Xi_1 \in \mathcal{L}(A_n(\mathbb{K}))$ par

$$\Xi_0 : \begin{array}{ccc} A_n(\mathbb{K}) & \to & A_n(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & ABA^\top \end{array}$$

.

$$\Xi_1 : \begin{array}{ccc} A_n(\mathbb{K}) & \to & A_n(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & AB + BA^\top \end{array}$$

2.11. Montrer que Ξ_0 et Ξ_1 sont bien définies, linéaires, et commutent.

2.12. Exprimer $\nu_2(\dim(A_n(\mathbb{K})))$ en fonction de $\nu_2(n)$.

En déduire qu'il existe $B \in A_n(\mathbb{K}) \backslash \{0_n\}$ et $(a_1, a_0) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$ABA^\top = a_0 B$$
$$AB + BA^\top = a_1 B.$$

2.13. Montrer que

$$(A^2 - a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n)B = 0_n.$$

2.14. En déduire qu'il existe $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$(A - \lambda_+ \mathrm{I}_n)(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)B = 0_n.$$

2.15. Conclure.

2.IV. Initialisation via Frobenius faible

Dans cette partie on suppose que le corps $\mathbb{K}$ vérifie

$$\text{tout polynôme de } \mathbb{K}[X] \text{ de degré impair admet une racine} \qquad (\spadesuit)$$

On cherche à montrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$ c'est à dire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire admet un vecteur propre.
Remarque: cette propriété est immédiate à l'aide de la notion de polynôme caractéristique, cf chapitre sur les déterminants, étant donné que χ_u est de degré n ses racines éventuelles sont les valeurs propres de u.

2.16. Soit n impair et P un polynôme unitaire de degré n. Montrer que la matrice compagnon $\mathcal{C}_P$ admet un vecteur propre.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n impaire et $u \in \mathcal{L}(E)$. On cherche à montrer que u admet un vecteur propre.

2.17. Montrer que pour tout $x \in E$ il existe un polynôme $\pi_{u,x}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_{u,x} | P$$

et que $\pi_{u,x}$ est unique à association près.

2.18. Justifier la bonne définition de

$$d = \max_{x \in E}(\deg(\pi_{u,x})) \in \mathbb{N}.$$

Que dire si $d = 0$?

On suppose désormais que $d \neq 0$ et on fixe $\xi \in E$ tel que $\deg(\pi_{u,\xi}) = d$.

2.19. On pose

$$F = \mathrm{Vect}(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi)).$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par u de dimension d.

2.20. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que
- $\forall k \in [\![0, d-2]\!]$, $\varphi(u^k(\xi)) = 0$,
- $\varphi(u^{d-1}(\xi)) = 1$.

2.21. On pose

$$G = \bigcap_{k=0}^{d-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k).$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel stable par u et que $\dim(G) \geq n - d$.

2.22. Montrer que $F \oplus G = E$.

2.23. Soit $\widetilde{B}$ une base de G.
Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\pi_{u,\xi}} & 0_{d,n-d} \\ 0_{n-d,d} & \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_G) \end{pmatrix}$$

2.24. Conclure par une récurrence bien choisie.

2.V. Propriétés du corps des complexes

On cherche dans cette partie à montrer que $\mathbb{C}$ vérifie les conditions ($\blacksquare$) et ($\spadesuit$).

2.25. Montrer que $\mathbb{C}$ vérifie ($\blacksquare$).

On cherche désormais à montrer que $\mathbb{C}$ vérifie ($\spadesuit$).

2.26. Montrer à l'aide des parties précédentes que pour tout corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ vérifie ($\spadesuit$) **ssi** $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$.

On cherche par conséquent à démontrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}}(1)$.

2.27. Montrer que $\mathbb{R}$ vérifie ($\spadesuit$) et en déduire $\mathcal{H}^1_{\mathbb{R}}(1)$.

On fixe désormais E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel tel que $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$ où n impair, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On fixe aussi $\mathcal{B}$ une base de E et on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Étant donnée $M \in M_n(\mathbb{C})$ on note $M^\dagger = \overline{M^\top}$ la transconjuguée de M c'est à dire la matrice de taille $n \times n$ définie par, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $(M^\dagger)_{i,j} = \overline{(M)_{j,i}}$.
On note aussi $H_n(\mathbb{C}) = \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \middle| M^\dagger = M\right\}$.

2.28. Montrer que $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$.
On définit $R_A, I_A \in \mathcal{L}(H_n(\mathbb{C}))$ par

$$R_A : \begin{array}{l} H_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C}) \\ B \mapsto \dfrac{1}{2}\left(AB + (AB)^\dagger\right) \end{array}.$$

$$I_A : \begin{array}{l} H_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C}) \\ B \mapsto \dfrac{1}{2i}\left(AB - (AB)^\dagger\right) \end{array}$$

2.29. Montrer que R_A et I_A sont bien définies sont $\mathbb{R}$-linéaires et commutent.
2.30. En déduire qu'il existe $B \in H_n(\mathbb{C})\backslash\{0\}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$R_A(B) = aB$$
$$I_A(B) = bB$$

2.31. Montrer que $AB = (a+ib)B$.
2.32. Conclure.

2.VI. Conclusion

2.33. Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps vérifiant les conditions (■) et (♠) (et $2 \neq 0$) alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{K}$.
2.34. Déduire de la question précédente et de la partie 2.V que tout polynôme complexe non constant admet une racine.

Références

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Proofs from the Book*. Springer, 1999.

[2] Harm Derksen. The fundamental theorem of algebra and linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, 2003.

[3] Michael Eisermann. The fundamental theorem of algebra made effective: an elementary real-algebraic proof via sturm chains. *The American Mathematical Monthly*, 2012.