En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Le théorème de d'Alembert Gauss, aussi appelé Théorème Fondamental de l'Algèbre, possède de nombreuses démonstrations. Ces démonstrations ont en commun un point remarquable: elle nécessitent toutes un argument issu de l'étude des fonctions réelles. On classifie souvent ces preuves en trois catégories arbitraires:

- Les preuves «d'analyse». Par exemple utilisant les propriétés des fonctions complexes suffisamment régulières.
- Les preuves «algébrique». Par exemple en utilisant des structures algébriques sur le corps des nombres complexes.
- Les preuves «topologique». Par exemple utilisant des décomptes d'indices de lacets dans le plan complexe.

All proofs below involve some mathematical analysis, or at least the topological concept of continuity of real or complex functions. Some also use differentiable or even analytic functions. This requirement has led to the remark that the Fundamental Theorem of Algebra is neither fundamental, nor a theorem of algebra.

Wikipedia

On propose dans ce devoir deux preuves.

- Le premier problème démontre le théorème de d'Alembert–Gauss par la méthode dite de d'Alembert, en estimant des minimum de fonctions polynomiales sur des disques.
- Le second problème démontre le théorème de d'Alembert–Gauss par une méthode dite de Laplace, en procédant par une récurrence bien choisie sur le degré.
- Pour un aperçu d'une troisième méthode de preuve, utilisant les indices de Cauchy de suites de Sturm voir par exemple [3].

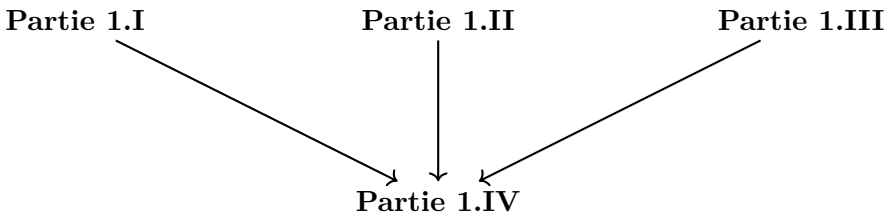
---

1. Une preuve d'analyse: méthode de d'Alembert par inégalité d'Argand

Une première famille de preuve utilise les propriétés des fonctions complexes sur $\mathbb{C}$, via par exemple l'étude de leurs extrema.
La preuve suivante, très classique (voir par exemple [1]) montre que le module d'un polynôme non constant admet un minimum sur toute boule fermée centrée autour d'un point, qu'il n'existe pas de minimum local à l'intérieur d'une telle boule en dehors des racines, ce qui par existence d'un minimum global entraîne l'existence d'une racine.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $B(\alpha, r)$ la boule fermée de centre α et de rayon r c'est à dire

$$B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leq r\}.$$

Dans la suite $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Les parties 1.I, 1.II, 1.III sont indépendantes.
La partie 1.IV utilise les résultats démontrés dans les parties précédentes.
On pourra bien évidemment admettre les résultats d'une partie dans les autres parties.



1.I. Théorème des Bornes Atteintes

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

> Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
> Il existe $\beta \in B(\alpha, r)$ tel que, pour tout $z \in B(\alpha, r)$, $|P(z)| \geq |P(\beta)|$.

Autrement dit le module de P admet un minimum sur tout boule fermée.
On fixe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
1.1. Montrer que pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (B(\alpha, r))^{\mathbb{N}}$ il existe une extractrice φ et $\beta \in B(\alpha, r)$ tels que

$$z_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in B(\alpha, r)$ en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq |\alpha| + r$$

par conséquent la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass (dans $\mathbb{C}$) il existe une extractrice φ telle que $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Notons β sa limite. Il reste à montrer $\beta \in B(\alpha, r)$.
Comme,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{\varphi(n)} - \alpha| \leq r$$

par opérations sur les limites et passage à la limite des inégalités larges on en déduit

$$|\beta - \alpha| \leq r.$$

On a donc bien

$$\boxed{z_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta \in B(\alpha, r)}.$$

1.2. En s'inspirant de la preuve du théorème des bornes atteintes, conclure.

Posons

$$V = \{|P(z)|,\ z \in B(\alpha, r)\}.$$

Il s'agit d'une partie non vide ($B(\alpha, r)$ non vide) de $\mathbb{R}$ minorée par 0(le module d'un nombre complexe est un réel positif). Par conséquent

$$A = \inf_{z\in B(\alpha,r)}(|P(z)|) \in \mathbb{R}_+$$

est bien défini.
Par caractérisation séquentielle de l'infimum il existe une suite $(v_n) \in V^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \to A$ lorsque $n \to +\infty$.
Par définition de V pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $z_n \in B(\alpha, r)$ tel que $v_n = |P(z_n)|$. Fixons le. On obtient ainsi une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (B(\alpha, r))^{\mathbb{N}}$.
Par la question **1.1.**, il existe donc une extractrice φ et $\beta \in B(\alpha, r)$ tels que $z_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$.
Donc par opérations sur les limites (produit et combinaison linéaire), $P(z_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\beta)$ et donc par opération sur les limites (module) $|P(z_{\varphi(n)})| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |P(\beta)|$.
Donc $v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |P(\beta)|$ et par extraction d'une suite convergente $v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$.
On en déduit donc que

$$\boxed{|P(\beta)| = \inf_{z\in B(\alpha,r)}(|P(z)|)}$$

ce qui est bien le résultat recherché (l'inf étant atteint il s'agit d'un minimum).

1.II. Croissance des polynômes en l'infini

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

> Pour tout $A > 0$ existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq r \Rightarrow |P(z)| \geq A$.

Autrement dit que le module de $P(z)$ tend vers $+\infty$ lorsque le module de z tend vers $+\infty$.

1.3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(0) = 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$P(z) = \lambda z^n \left(1 + Q\left(z^{-1}\right)\right).$$

Avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $a_n \neq 0$ on a pour tout $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \\ &= a_n z^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right) \\ &= a_n z^n \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n-j}}{a_n} z^{-j}\right) \end{aligned}$$

donc en posant

$$\boxed{Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n-j}}{a_n} X^j}$$

et $\boxed{\lambda = a_n}$ on a bien $\boxed{Q(0) = 0}$ et pour tout $z \neq 0$,

$$\boxed{P(z) = \lambda z^n \left(1 + Q\left(z^{-1}\right)\right)}.$$

1.4. Conclure.

Avec $Q = \sum_{k=1}^{m} b_k X^k$ on a pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$,

$$|Q(\xi)| \leq \sum_{k=1}^{m} |b_k||\xi|^k$$

et comme $\sum_{k=1}^{m} |b_k| x^k \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ on en déduit en particulier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall \xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq r_0 \Rightarrow |Q(\xi)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, fixons un $r_0 > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ si $|\xi| \leq r_0$ alors $|Q(\xi)| \leq \frac{1}{2}$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (comme $|z| \geq \frac{1}{r_0} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| \leq r_0$)

$$|z| \geq \frac{1}{r_0} \Rightarrow |Q(z^{-1})| \leq \frac{1}{2}.$$

Alors pour tout z tel que $|z| \geq \frac{1}{r_0}$, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |\lambda||z|^n |1 + Q(z^{-1})| \\ &\geq |\lambda||z|^n \left(|1| - |Q(z^{-1})|\right) \\ &\geq \frac{|\lambda|}{2} |z|^n. \end{aligned}$$

Soit $A > 0$ posant

$$r = \max\left(\frac{1}{r_0}, \left(\frac{2}{|\lambda|} A\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

on obtient donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq r \Rightarrow |P(z)| \geq A}.$$

1.III. Inégalité d'Argand

On cherche dans cette partie à montrer le résultat suivant:

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) \neq 0$.
Pour tout $r > 0$ il existe $\xi \in B(\alpha, r)$ tel que $|P(\xi)| < |P(\alpha)|$.

Autrement dit le minimum du module de P n'admet pas de minimum local en tout point différent d'une racine.

1.5. Montrer qu'il existe $m \in [\![1, n]\!]$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $R \in \mathbb{C}_{n-m}[X]$ vérifiant $R(0) = 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = P(0) + \mu z^m (1 + R(z)).$$

Avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ posons

$$\boxed{m = \min\left(\{k \in [\![1, n]\!] \mid a_k \neq 0\}\right)}$$

bien défini car $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$ donc n est dans l'ensemble.
Alors

$$\begin{aligned} P &= a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} 0 + \sum_{k=m}^{n} a_k X^k \\ &= a_0 + \underbrace{a_m}_{\neq 0} X^m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k \\ &= a_0 + a_m X^m \left(1 + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^{k-m}\right) \end{aligned}$$

et donc en posant

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{a_{j+m}}{a_m} X^j \in \mathbb{C}_{n-m}[X]}$$

et $\boxed{\mu = a_m \neq 0}$ on a

$$P = P(0) + \mu X^m (1 + R(X))$$

et donc en particulier, en évaluant

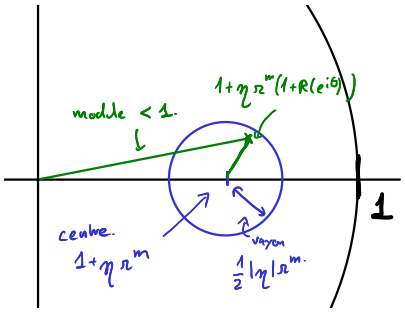
$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = P(0) + \mu z^m (1 + R(z)).$$

1.6. Soit $\eta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$,

$$\left|1 + \eta r^m \left(1 + R(re^{i\theta})\right)\right| < 1$$

Par le même argument qu'à la question **1.4.** comme $R(0) = 0$ pour r au voisinage de 0, si $|z| = r$ alors $|R(z)| \leq \frac{1}{2}$.
De plus comme $1 + \eta r^m \xrightarrow[r \to 0]{} 1 > 0$ pour r au voisinage de 0, $1 + \eta r^m > 0$.
Avec $r_0 > 0$ tel que $]0, r_0[$ soit un tel voisinage à droite de 0
on obtient

$$\begin{aligned} \left|1 + \eta r^m \left(1 + R(re^{i\theta})\right)\right| &= \left|1 + \eta r^m + \eta r^m R(re^{i\theta})\right| \\ &\leq |1 + \eta r^m| + |\eta r^m||R(re^{i\theta})| \\ &\leq |1 + \eta r^m| + (-\eta) r^m \frac{1}{2} \\ &= 1 + \eta r^m + (-\eta) r^m \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{\eta}{2} r^m \\ &< 1 \end{aligned}$$



1.7. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\mu}{P(0)} (e^{i\theta})^m \in \mathbb{R}_-^*.$$

Comme $\mu \neq 0$ il existe (forme exponentielle d'une nombre complexe) $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\mu}{P(0)} = \left|\frac{\mu}{P(0)}\right| e^{i\varphi}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$m\theta + \varphi \equiv -\pi \ [2\pi]$$

par exemple (parmi d'autres)

$$\theta = -\frac{\pi + \varphi}{m}$$

alors

$$\boxed{\frac{\mu}{P(0)}(e^{i\theta})^m \in \mathbb{R}_-^*}.$$

1.8. Conclure dans le cas $\alpha = 0$ et $r = 1$.

Supposons $P(0) \neq 0$.

- Comme $P(0) \neq 0$, fixons $\theta \in \mathbb{R}$ comme à la question **1.7.**, i.e tel que
$$\frac{\mu}{P(0)}(e^{i\theta})^m \in \mathbb{R}_-^*.$$
- Comme $\eta = \frac{\mu}{P(0)}(e^{i\theta})^m \in \mathbb{R}_-^*$, fixons $r_0 > 0$ comme à la question **1.6.** i.e tel que pour tout $r \in]0, r_0[$,
$$\left|1 + \frac{\mu}{P(0)}(e^{i\theta})^m r^m (1 + R(re^{i\theta}))\right| < 1.$$
- Soit $r \in]0, \min(1, r_0)[$ quelconque.
Alors par la question **1.5.** et les définitions précédentes, (et comme $|P(0)| \neq 0$)
$$\begin{aligned} |P(re^{i\theta})| &= \left|P(0) + \mu(re^{i\theta})^m \left(1 + R(re^{i\theta})\right)\right| \\ &= |P(0)| \left|1 + \frac{\mu}{P(0)} r^m (e^{i\theta})^m (1 + R(re^{i\theta}))\right| \\ &< |P(0)| \end{aligned}$$

Et donc $\xi = re^{i\theta}$ vérifie bien $\boxed{\xi \in B(0,1)}$ et $\boxed{|P(\xi)| < |P(0)|}$.

1.9. Conclure dans le cas général.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ supposons $P(\alpha) \neq 0$
Posons

$$\widehat{P} = P\left(rX + \alpha\right).$$

Alors $\widehat{P}$ est un polynôme de degré n, et de plus $\widehat{P}(0) = P(\alpha) \neq 0$.
Par la question **1.8.**, il existe z tel que $|z| \leq 1$ et $|\widehat{P}(z)| < |\widehat{P}(0)|$.
Donc $\xi = rz + \alpha$ vérifie $|\xi - \alpha| \leq r$ i.e $\boxed{\xi \in B(\alpha, r)}$ et $\boxed{|P(\xi)| < |P(\alpha)|}$.

1.IV. Conclusion

1.10. En utilisant les résultats des parties 1.I, 1.II et 1.III montrer que P admet une racine complexe.

- Posons par exemple $A = |P(0)|+1$. Par la partie 1.II il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \notin B(0,r)$, $|P(z)| \geq |P(0)|+1$. Fixons le.
- D'après la partie 1.I il existe $\beta \in B(0,r)$ tel que $|P(\beta)| = \min_{z \in B(0,r)}(|P(z)|)$.
- Comme en particulier $|P(\beta)| \leq |P(0)| + 1$ on en déduit que pour tout $z \notin B(0,r)$, $|P(z)| \geq |P(\beta)|$ et donc
$$|P(\beta)| = \min_{z \in \mathbb{C}}(|P(z)|)$$
(c'est à dire $|P|$ admet un minimum global).
- Supposons par l'absurde que $P(\beta) \neq 0$.

- Soit $r > 0$ quelconque. Fixons le. Par la partie 1.III il existe $\xi \in B(\beta, r)$ tel que $|P(\xi)| < |P(\beta)|$.
- Cela contredit la minimalité de $|P(\beta)|$ et est donc absurde. Donc $|P(\beta)| = 0$.
- On en déduit que β est une racine de P.

Par conséquent $\boxed{P \text{ admet au moins une racine}}$.

---

2. Une preuve algébrique: méthode de Laplace par vecteurs propres

Une autre famille de preuves, utilise la structure du corps des nombres complexe, et démontre que pour tout corps $\mathbb{K}$, si
- tout polynôme de degré impair de $\mathbb{K}[X]$ admet une racine
- tout scalaire admet une racine carrée

alors par récurrence sur la valuation 2-adique du degré, tout polynôme admet une racine.
La preuve suivante, s'inspirant d'un article de Derksen [2], propose une approche en termes d'algèbre linéaire d'une telle méthode.
Dans la suite $\mathbb{K}$ est un corps (tel que $2 \neq 0$).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E\backslash\{0\}$ est **vecteur propre** de u ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u c'est à dire ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce sujet on dira de plus que:
- E vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$ ssi pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un vecteur propre
- E vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$ ssi pour tous $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ endomorphismes de E qui **commutent**, u_1 et u_2 admettent un vecteur propre **commun**

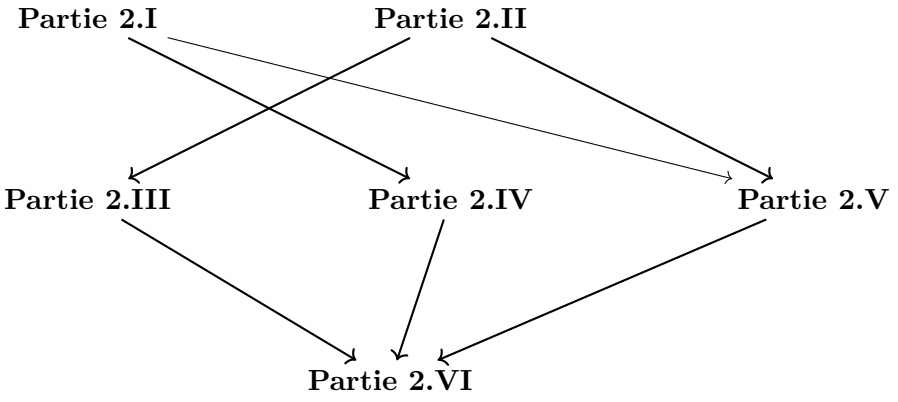
et pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$ la proposition

$$\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k) : \quad \text{«tout } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension finie vérifiant } \nu_2(\dim(E)) \leq k, \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}_1\text{»}$$

et $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ la proposition

$$\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k) : \quad \text{«tout } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension finie vérifiant } \nu_2(\dim(E)) \leq k, \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}_2\text{»}$$

On pourra bien évidemment admettre les résultats d'une partie dans les autres parties.



2.I. Un lien vers les racines de polynômes

On commence par exhiber un lien (parmi de nombreux autres, cf cours de deuxième année) entre les vecteurs propres d'endormorphismes et les racines de polynômes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire et $\mathcal{C}_P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sa matrice compagnon définie par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2.1. Soit $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Expliciter $(\mathcal{C}_P) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Par produit matriciel on obtient directement, le résultat

$$\boxed{\mathcal{C}_p \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - a_0 x_{n-1} \\ x_0 - a_1 x_{n-1} \\ x_1 - a_2 x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-2} - a_{n-1} x_{n-1} \end{pmatrix}}.$$

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Montrer que

$$\mathcal{C}_P \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], & x_{k-1} = \lambda x_k + a_k x_{n-1} \\ & P(\lambda) x_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Par la question précédente on a

$$\mathcal{C}_P \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} & 0 - a_0 x_{n-1} = \lambda x_0 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], & x_{k-1} - a_k x_{n-1} = \lambda x_k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], & x_{k-1} = \lambda x_k + a_k x_{n-1} \\ & a_0 x_{n-1} + \lambda x_0 = 0. \end{cases}$$

Or si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$x_{k-1} = \lambda x_k + a_k x_{n-1}$$

on a par récurrence descendante (à rédiger si nécessaire), pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$x_k = \left(\sum_{j=k+1}^{n-1} a_j \lambda^{j-(k+1)} + \lambda^{n-(k+1)} \right) x_{n-1}$$

(il s'agit de l'algorithme de Horner) et en particulier

$$a_0 x_{n-1} + \lambda x_0 = P(\lambda) x_{n-1}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{C}_P\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall k\in[\![1,n-1]\!], & x_{k-1}=\lambda x_k+a_kx_{n-1}\\ & P(\lambda)x_{n-1}=0.\end{cases}}$$

Remarque: Si on s'intéressait plutôt à $(\mathcal{C}_P)^\top$ on obtient

$$(\mathcal{C}_P)^\top\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall k\in[\![1,n-1]\!], & x_k=\lambda^kx_0\\ & P(\lambda)x_0=0.\end{cases}$$

2.3. En déduire que l'application linéaire canoniquement associée à $\mathcal{C}_P$ admet un vecteur propre **ssi** P admet une racine dans $\mathbb{K}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que P admet une racine λ dans $\mathbb{K}$. On définit un vecteur $\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ par la récurrence descendante finie suivante
$$\begin{matrix}x_{n-1}=1\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ x_{k-1}=\lambda x_k+a_k\end{matrix}.$$
Alors comme $P(\lambda)1=0$ par la question **2.2.**
$$\mathcal{C}_P\begin{pmatrix}x_0\\\dots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\\dots\\x_{n-1}\end{pmatrix}$$
et comme $x_{n-1}=1\neq 0$ il s'agit bien d'un vecteur propre.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{C}_P$ admette un vecteur propre $\begin{pmatrix}x_0\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ et soit $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que
$$\mathcal{C}_P\begin{pmatrix}x_0\\\dots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\\dots\\x_{n-1}\end{pmatrix}.$$
Par la question **2.2.** on a
$$\begin{cases}\forall k\in[\![1,n-1]\!], & x_{k-1}=\lambda x_k+a_kx_{n-1}\\ & P(\lambda)x_{n-1}=0.\end{cases}.$$
Supposons par l'absurde que $x_{n-1}=0$. Comme pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $x_{k-1}=\lambda x_k+a_kx_{n-1}$ par récurrence descendante on obtient que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $x_k=0$ et donc le vecteur est nul. Ce qui est absurde.
Donc $x_{n-1}\neq 0$ et comme $\mathbb{K}$ est un corps on en déduit $P(\lambda)=0$, et P admet bien une racine.

On a donc bien montré le résultat suivant $\boxed{\mathcal{C}_P \text{ admet un vecteur propre } \textbf{ssi } P \text{ admet une racine dans } \mathbb{K}}$.

Remarque: On a en fait montré que le résultat plus fort suivant: l'ensemble des **valeur propres** de $\mathcal{C}_P$ est l'ensemble des racines de P.

2.II. Équivalence entre deux propositions

On cherche à montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)\Leftrightarrow\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ (et on pourrait, par récurrence, montrer l'équivalence avec l'existence d'un vecteur propre commun à toute famille finie d'endomorphismes qui commutent).
Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

2.4. Montrer que $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)\Rightarrow\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$.

Supposons $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant $\nu_2(\dim(E))\leq k$.
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Comme u commute avec Id_E (par exemple), u admet un vecteur propre.
D'où $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$.
On a bien

$$\boxed{\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)\Rightarrow\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)}$$

On suppose désormais $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$ et on cherche à montrer $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$
Dans les questions **2.5.** à **2.8.** on fixe fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini tel que $\nu_2(\dim(E)) \leq k$ ainsi que $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent.

2.5. Que dire si u_1 est une homothétie ?

Si u_1 est une homothétie, alors tout vecteur (non nul) de E est vecteur propre de u_1. Par $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$, u_2 admet un vecteur propre. C'est donc un vecteur propre commun à u_1 et u_2.
Donc $\boxed{u_1 \text{ et } u_2 \text{ admettent un vecteur propre commun}}$.

On suppose désormais que u_1 n'est pas une homothétie.

2.6. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u_1 - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \cup \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.
On pose

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda \mathrm{Id}_E) \quad , \quad F_\lambda = \mathrm{Im}(u_1 - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

Par $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$, u_1 admet un vecteur propre. Fixons $x \in E\backslash\{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$.
Alors $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et donc $(x \neq 0_E)$ $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ d'où $\boxed{u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)}$.
Et comme u_1 n'est pas une homothétie, $\boxed{u - \lambda \mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

2.7. Montrer que
- E_λ **et** F_λ sont stables par u_1 et u_2
- $(u_1)_{E_\lambda}$ et $(u_2)_{E_\lambda}$ commutent **et** $(u_1)_{F_\lambda}$ et $(u_2)_{F_\lambda}$ commutent

- Comme $u_1 - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec u_1 et avec u_2 (car est un polynôme en u_1 qui commute avec u_1 et u_2) son image et son noyau sont stables par u_1 et par u_2.
  Donc $\boxed{E_\lambda \text{ et } F_\lambda \text{ sont stables par } u_1 \text{ et } u_2}$.
- Soit $x \in E_\lambda$. On a $((u_1)_{E_\lambda} \circ (u_2)_{E_\lambda})(x) = u_1(u_2(x)) = u_2(u_1(x)) = ((u_2)_{E_\lambda} \circ (u_1)_{E_\lambda})(x)$ et donc $\boxed{(u_1)_{E_\lambda} \text{ et } (u_2)_{E_\lambda} \text{ commutent}}$.
  De même $\boxed{(u_1)_{F_\lambda} \text{ et } (u_2)_{F_\lambda} \text{ commutent}}$.

2.8. Montrer que
- E_λ **et** F_λ sont de dimensions comprises entre 1 et $\dim(E) - 1$
- $\nu_2(\dim(E_\lambda)) \leq k$ **ou** $\nu_2(\dim(F_\lambda)) \leq k$

- Comme $u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$ on a $\dim(E_\lambda) > 0$ et $\dim(F_\lambda) < \dim(E)$. De plus comme $u - \lambda \mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ on a $\dim(E_\lambda) < \dim(E)$ et $\dim(F_\lambda) > 0$.
  Par conséquent $\boxed{\dim(E_\lambda), \dim(F_\lambda) \in [\![1, \dim(E) - 1]\!]}$.
- Par le théorème du rang, $\dim(E_\lambda) + \dim(F_\lambda) = \dim(E)$.
  Par conséquent
  $$\nu_2(\dim(E)) \geq \min(\nu_2(\dim(E_\lambda)), \nu_2(\dim(F_\lambda)))$$
  et comme
  $$k \geq \nu_2(\dim(E))$$
  on en déduit
  $$\boxed{\nu_2(\dim(E_\lambda)) \leq k \text{ ou } \nu_2(\dim(F_\lambda)) \leq k}.$$

2.9. Conclure par une récurrence bien choisie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons
$\mathcal{Q}_n$: «tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\nu_2(\dim(E)) \leq k$ et $\dim(E) \leq n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$»
et procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarque: cela revient à faire une récurrence forte sur tous les entiers d tels que $\nu_2(d) \leq k$.
- **Initialisation**: Pour $n = 1$ le résultat est vrai car tous endomorphismes d'un ev de dimension 1 sont des homothéties.
- **Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{Q}_n$.
  Si $\nu_2(n+1) > k$ il n'y a rien à faire.
  Supposons désormais $\nu_2(n+1) \leq k$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n+1$.
  Soient u_1, u_2 deux endomorphismes de E qui commutent.

Par les questions **2.5.** si u_1 est une homothétie alors u_1 et u_2 admettent un vecteur propre commun.
Supposons que u_1 n'est pas une homothétie. Par **2.8.** il existe deux sevs E_λ et F_λ stables par u_1 et par u_2, tels que les endomorphismes induits commutent et de dimensions entre 1 et n.
De plus au moins l'un des deux a une valuation 2-adique plus petite que k.
Si c'est le cas de E_λ alors comme $\dim(E_\lambda) \leq n$, $\nu_2(\dim(E_\lambda)) \leq k$, par $\mathcal{Q}_n$ (appliqué à E_λ) les endomorphismes induits $(u_1)_{E_\lambda}$ et $(u_2)_{E_\lambda}$ (qui commutent) admettent un vecteur propre commun dans E_λ. En le notant $x \in E_\lambda$, comme $E_\lambda \subset E$ on a $x \in E$ et comme $u_1(x) = (u_1)_{E_\lambda}(x)$ et $u_2(x) = (u_2)_{E_\lambda}(x)$, x est un vecteur propre commun à u_1 et u_2. De même si $\nu_2\dim(F_\lambda) \leq k$.
Dans tous les cas u_1 et u_2 admettent un vecteur propre commun.
On a donc bien montré $\mathcal{Q}_{n+1}$.

- **Conclusion**: on a montré $\mathcal{Q}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$.
  Par récurrence on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n$.
  C'est à dire $\boxed{\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)}$.

2.III. Hérédité

Dans cette partie on suppose que le corps $\mathbb{K}$ possède la propriété suivante

$$\forall \Delta \in \mathbb{K},\ X^2 - \Delta \text{ admet une racine} \qquad (\blacksquare)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$ et on cherche à montrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1)$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n tel que $\nu_2(n) = k+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on pose

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

On rappelle que $A_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ c'est à dire $A_n(\mathbb{K}) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) | B^\top = -B\}$.

2.10. Montrer que **si** il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AB = \lambda B$ **alors** u admet un vecteur propre.

Comme B est non nulle elle admet une colonne non nulle C_j. Par produit matriciel $AC_j = \lambda C_j$ et donc avec x tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = C_j$ on a $u(x) = \lambda x$.
Donc $\boxed{u \text{ admet un vecteur propre}}$.

On définit $\Xi_0, \Xi_1 \in \mathcal{L}(A_n(\mathbb{K}))$ par

$$\Xi_0 : \begin{array}{l} A_n(\mathbb{K}) \to A_n(\mathbb{K}) \\ B \mapsto ABA^\top \end{array}$$

.

$$\Xi_1 : \begin{array}{l} A_n(\mathbb{K}) \to A_n(\mathbb{K}) \\ B \mapsto AB + BA^\top \end{array}$$

2.11. Montrer que Ξ_0 et Ξ_1 sont bien définies, linéaires, et commutent.

- Soit $B \in A_n(\mathbb{K})$. On a comme $B^\top = -B$ et $(A^\top)^\top = A$,

  $$(\Xi_0(B))^\top = (ABA^\top)^\top = (A^\top)^\top B^\top A^\top = AB^\top A^\top = -ABA^\top = -(\Xi_0(B))$$

  d'où $\Xi_0(B) \in A_n(\mathbb{K})$.
  D'où $\boxed{\text{la bonne définition de } \Xi_0 : A_n(\mathbb{K}) \to A_n(\mathbb{K})}$.
  De même pour $B \in A_n(\mathbb{K})$,

  $$(\Xi_1(B))^T = B^\top A^\top + (A^\top)^\top B^\top = -BA^\top - AB = -(\Xi_1(B))$$

  d'où la $\boxed{\text{bonne définition de } \Xi_1 : A_n(\mathbb{K}) \to A_n(\mathbb{K})}$.
- La $\boxed{\text{linéarité}}$ est issue directement de la bilinéarité du produit matriciel.

- Soit $B \in A_n(\mathbb{K})$. On a
$$\begin{aligned}(\Xi_0 \circ \Xi_1)(B) &= (\Xi_0(\Xi_1(B))) \\ &= A\left(AB + BA^\top\right)A^\top \\ &= A^2BA^\top + AB(A^\top)^2 \\ &= A(ABA^\top) + (ABA^\top)A^\top \\ &= \Xi_1(\Xi_0(B)) \\ &= (\Xi_1 \circ \Xi_0)(B)\end{aligned}$$
et donc $\boxed{\Xi_0 \text{ et } \Xi_1 \text{ commutent}}$.

2.12. Exprimer $\nu_2(\dim(A_n(\mathbb{K})))$ en fonction de $\nu_2(n)$.
En déduire qu'il existe $B \in A_n(\mathbb{K})\backslash\{0_n\}$ et $(a_1, a_0) \in \mathbb{K}^2$ tels que
$$\begin{aligned}ABA^\top &= a_0 B \\ AB + BA^\top &= a_1 B.\end{aligned}$$

On a
$$\boxed{\dim(A_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}}.$$
Comme $\nu_2(n) \geq 1$, on a $\nu_2(n-1) = 0$ et par conséquent $\boxed{\nu_2(\dim(A_n(\mathbb{K}))) = \nu_2(n) - 1}$.
Par conséquent $A_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $\nu_2(\dim(A_n(\mathbb{K}))) = k \leq k$ et par l'hypothèse $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k)$, les endomorphismes Ξ_0 et Ξ_1, qui commutent, admettent un vecteur propre commun.
Soit $B \in A_n(\mathbb{K})$ un tel vecteur propre. Par définition il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{K}$ tels que
$$\boxed{\begin{aligned}\Xi_0(B) &= ABA^\top &&= a_0 B \\ \Xi_1(B) &= AB + BA^\top &&= a_1 B.\end{aligned}}.$$

2.13. Montrer que
$$(A^2 - a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n)B = 0_n.$$

On a
$$ABA^\top = a_0 B.$$
De plus
$$ABA^\top = A(\Xi_1(B) - AB) = A(a_1 B - AB) = -A^2 B + a_1 AB.$$
Par conséquent
$$a_0 B = (-A^2 + a_1 A)B$$
et donc
$$\boxed{(A^2 - a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n)B = 0_n}.$$

2.14. En déduire qu'il existe $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{K}^2$ tels que
$$(A - \lambda_+ \mathrm{I}_n)(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)B = 0_n.$$

Comme $2 \neq 0$ on a (mise sous forme canonique), dans $\mathbb{K}[X]$,
$$X^2 - a_1 X + a_0 = \left(X - \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_0}{4}.$$
Posons $\Delta = a_1^2 - 4a_0$.
Par la propriété (■) de $\mathbb{K}$ le polynôme $X^2 - \Delta$ admet une racine, par degré il est alors scindé et comme l'opposé de toute racine est une racine il existe donc $\delta \in \mathbb{K}$ tel que
$$X^2 - \Delta = (X - \delta)(X + \delta).$$

Alors en posant

$$\lambda_\pm = \frac{a_1 \pm \delta}{2}$$

on obtient

$$X^2 - a_1 X + a_0 = (X - \lambda_-)(X - \lambda_+).$$

(À détailler si nécessaire, cf premier cours de l'année).
En évaluant en $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on obtient

$$A^2 - a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n = (A - \lambda_+ \mathrm{I}_n)(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)$$

et donc en particulier, par la question précédente,

$$\boxed{(A - \lambda_+ \mathrm{I}_n)(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)B = 0_n}.$$

2.15. Conclure.

On a $B \neq 0_n$.
- Si $(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)B = 0_n$ alors $A - \lambda_- \mathrm{I}_n$ admet un vecteur propre par la question **2.10.**.
- Si $(A - \lambda_- \mathrm{I}_n)B \neq 0_n$ alors $A - \lambda_+ \mathrm{I}_n$ admet un vecteur propre par la question **2.10.**.

Dans tous les cas il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A - \lambda \mathrm{I}_n$ admet un vecteur propre. Avec $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_n\}$ un tel vecteur comme $Ax = (A - \lambda \mathrm{I}_n)x + \lambda x$, c'est aussi un vecteur propre de A.
Donc A admet un vecteur propre ce qui est équivalent (par écriture dans la base $\mathcal{B}$) à

$$\boxed{u \text{ admet un vecteur propre}}.$$

Comme E de dimension finie telle que $\nu_2(\dim(E)) = k+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ sont arbitraires, et que le cas $\nu_2(\dim(E)) \leq k$ est immédiat par la question **2.4.**, on a bien montré

$$\boxed{\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1)}.$$

2.IV. Initialisation via Frobenius faible

Dans cette partie on suppose que le corps $\mathbb{K}$ vérifie

$$\text{tout polynôme de } \mathbb{K}[X] \text{ de degré impair admet une racine} \qquad (\spadesuit)$$

On cherche à montrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$ c'est à dire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire admet un vecteur propre.
Remarque: cette propriété est immédiate à l'aide de la notion de polynôme caractéristique, cf chapitre sur les déterminants, étant donné que χ_u est de degré n ses racines éventuelles sont les valeurs propres de u.

2.16. Soit n impair et P un polynôme unitaire de degré n. Montrer que la matrice compagnon $\mathcal{C}_P$ admet un vecteur propre.

Par **2.3.** $\mathcal{C}_P$ admet un vecteur propre ssi P admet une racine. Et par $(\spadesuit)$, comme P est degré impair, P admet une racine.
Donc $\boxed{\mathcal{C}_P \text{ admet un vecteur propre}}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n impaire et $u \in \mathcal{L}(E)$. On cherche à montrer que u admet un vecteur propre.

2.17. Montrer que pour tout $x \in E$ il existe un polynôme $\pi_{u,x}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_{u,x} | P$$

et que $\pi_{u,x}$ est unique à association près.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_1(u)(x) = 0$ et $P_2(u)(x) = 0$. Alors $(P_1 + P_2)(u)(x) = P_1(u)(x) + P_2(u)(x) = 0$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ quelconque.
Alors $(QP)(u) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0) = 0$.
Par conséquent $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et donc il existe $\pi_{u,x}$, unique à association près tel que

$$\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\} = \pi_{u,x}\mathbb{K}[X]}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

2.18. Justifier la bonne définition de

$$d = \max_{x\in E}(\deg(\pi_{u,x})) \in \mathbb{N}.$$

Que dire si $d = 0$?

Soit $x \in E$.
Par dimension comme la famille de vecteurs de E, $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^n(x))$ admet $n+1$ et que E est de dimension n, par dimension elle est liée.
Donc il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = 0_E$$

c'est à dire

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)}_{\in \mathbb{K}_n[X]}(u)(x) = 0$$

donc $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ contient un polynôme non nul et degré $\leq n$.
Par conséquent, $\pi_{u,x}$ est non nul et de degré $\leq n$ (car divise un polynôme de degré $\leq n$).
On en déduit que

$$\{\deg(\pi_{u,x}), x \in E\} \subset [\![0, n]\!]$$

et donc $\boxed{d = \max_{x\in E}(\deg(\pi_{u,x})) \in \mathbb{N} \text{ est bien défini}}$, comme maximum d'une partie majorée de $\mathbb{N}$.
De plus si $d = 0$ alors pour tout x, on a pour tout P, $P(u)(x) = 0$, en particulier pour tout $x \in E$,$x = 0$. Or $\{0\}$ est de dimension 0 qui est paire. On a donc $\boxed{d = 0 \text{ est impossible}}$.

On suppose désormais que $d \neq 0$ et on fixe $\xi \in E$ tel que $\deg(\pi_{u,\xi}) = d$.

2.19. On pose

$$F = \text{Vect}(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi)).$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par u de dimension d.

- Soient $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(\xi) = 0_E.$$

Alors

$$\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k\right)(u)(\xi) = 0_E.$$

Donc $\pi_{u,\xi} | \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ et comme $\deg(\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k) \leq d-1 < d = \deg(\pi_{u,\xi})$ on en déduit $\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et donc $a_0 = \cdots = a_{d-1} = 0$.
Donc la famille est libre, et donc comme elle contient d vecteurs

$$\boxed{\dim(\text{Vect}(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi))) = d}.$$

- ▷ **Première méthode**
On a pour tout $k \in [\![0, d-2]\!]$ on a $u(u^k(\xi)) = u^{k+1}(\xi) \in F$ car $k+1 \in [\![0, d-1]\!]$.
Il reste à démontrer que $u(u^{d-1}(\xi)) \in F$.
Quitte à multiplier par un scalaire non nul on peut choisir $\pi_{u,\xi}$ unitaire.
Avec $\pi_{u,\xi} = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ on a donc

$$u^d(\xi) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(\xi) = 0_E$$

et donc, par définition de F

$$u^d(\xi) = \sum_{k=0}^{d-1} (-a_k) u^k(\xi) \in F$$

d'où $u(u^{d-1}(\xi)) = u^d(\xi) \in F$.
Comme $\forall k \in [\![0, d-1]\!]$, $u(u^k(\xi)) \in F$ et que la famille $(u^k(\xi))_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ génère F on a donc $\boxed{F \text{ stable par } u}$.

▷ **Variante**
Par définition de F,

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(\xi),\ (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d \right\}.$$
$$= \{P(u)(\xi),\ P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$$

Montrons que l'on peut aussi écrire

$$F = \{P(u)(\xi),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

L'inclusion $\boxed{\subset}$ est immédiate (car $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$).
Soit $y \in \{P(u)(\xi),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(\xi)$.
Écrivons la division euclidienne de P par $\pi_{u,\xi}$:

$$P = Q\pi_{u,\xi} + R$$

avec $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ (car $\deg(\pi_{u,\xi}) = d$).
En évaluant en u,

$$P(u) = Q(u) \circ \pi_{u,\xi}(u) + R(u)$$

puis en évaluant en ξ,

$$y = 0 + R(u)(\xi)$$

et comme $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, $y \in F$.
D'où l'inclusion $\boxed{\supset}$.
Par conséquent soit $y \in F$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(\xi)$ et alors $u(y) = (XP)(u)(\xi) \in F$ car $XP \in \mathbb{K}[X]$.
Donc $\boxed{F \text{ est stable par } u}$.

2.20. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que
- $\forall k \in [\![0, d-2]\!]$, $\varphi(u^k(\xi)) = 0$,
- $\varphi(u^{d-1}(\xi)) = 1$.

La famille $(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi))$ étant libre, par le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base.
Il suffit ensuite de prendre pour φ la forme linéaire coordonnée associée à $u^{d-1}(\xi)$ dans cette base pour obtenir $\boxed{\text{l'existence d'un tel } \varphi}$.

2.21. On pose

$$G = \bigcap_{k=0}^{d-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k).$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel stable par u et que $\dim(G) \geq n - d$.

- Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $\varphi \circ u^k$ est une forme linéaire sur E et comme $(\varphi \circ u^k)(u^{d-1-k}(\xi)) = 1 \neq 0$ il s'agit d'une forme linéaire non nulle. D'où $\mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)$ est un hyperplan.
  Par conséquent G est l'intersection de d hyperplans c'est donc un sev vérifiant $\boxed{\dim(G) \geq n - d}$.
- ▷ **Première méthode** Soit $x \in G$ c'est à dire tel que $\forall k \in [\![0, d-1]\!]$, $\varphi(u^k(x)) = 0$.
  Pour $k \in [\![0, d-2]\!]$, on a $\varphi(u^k(u(x))) = \varphi(u^{k+1}(x)) = 0$ car $k+1 \in [\![0, d-1]\!]$.
  Il reste à démontrer que $\varphi(u^{d-1}(u(x))) = 0$.
  On a vu qu'il existe $\pi_{u,x}$ non nul tel que $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$ et que de plus $\deg(\pi_{u,x}) \leq d$.
  Quitte à multiplier par un scalaire non nul on peut prendre $\pi_{u,x}$ unitaire, et avec $d_x \leq d$ son degré on peut alors écrire $\pi_{u,x} = X^{d_x} + \sum_{k=0}^{d_x-1} a_k X^k$ d'où $X^{d-d_x}\pi_{u,x} = X^d + \sum_{k=d-d_x}^{d-1} a_{k-(d-d_x)} X^k$. (Il suffit en fait d'exhiber un polynôme P tel que $P(u)(x) = 0$ et $\deg(P) \leq d$).
  Alors en évaluant $X^{d-d_x}\pi_{u,x}$ en u puis en x,

$$u^d(x) + \sum_{k=d-d_x}^{d-1} a_{k-(d-d_x)} u^k(x) = 0$$

et donc
$$u^d(x) = \sum_{k=d-d_x}^{d-1} (-a_{k-(d-d_x)})u^k(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)).$$
Or comme $x \in G$ on a pour tout k, $u^k(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
On en déduit $u^{d-1}(u(x)) = u^d(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ i.e $u(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^{d-1})$.
Comme $\forall k \in [\![0, d-1]\!]$, $u(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)$ on a bien $u(x) \in G$.
Donc $\boxed{G \text{ stable par } u}$.

▷ **Variante**
Par définition
$$\begin{aligned} G &= \left\{x \in E \mid \forall k \in [\![0, d-1]\!], \varphi(u^k(x)) = 0\right\} \\ &= \left\{x \in E \mid \forall k \in [\![0, d-1]\!], u^k(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)\right\} \end{aligned}$$
De plus comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sev on a pour tout $x \in E$,
$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, d-1]\!], u^k(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\Leftrightarrow \forall (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d, \ \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{K}_{d-1}[X], P(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$
et donc la définition de G revient à
$$G = \{x \in E | \forall P \in \mathbb{K}_{d-1}[X], P(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}.$$
Montrons que l'on peut aussi écrire
$$G = \{x \in E | \forall P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}.$$
L'inclusion $\boxed{\supset}$ est immédiate (car $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$).
Soit $x \in G$ c'est à dire tel que pour tout $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, $P(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Écrivons la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$:
$$P = Q\pi_{u,x} + R$$
avec $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ car $\deg(R) < \deg(\pi_{u,x}) \leq d$ par définition de d.
En évaluant en u
$$P(u) = Q(u) \circ \pi_{u,x}(u) + R(u)$$
puis en évaluant en x,
$$P(u)(x) = 0 + R(u)(x)$$
et comme $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, $R(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
D'où l'inclusion $\boxed{\subset}$.
Par conséquent soit $x \in G$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(u(x)) = (PX)(u)(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ car $PX \in \mathbb{K}[X]$ et donc $u(x) \in G$.
Donc $\boxed{G \text{ est stable par } u}$.

2.22. Montrer que $F \oplus G = E$.

On a
$$\dim(F) + \dim(G) \geq d + (n - d) = n = \dim(E).$$
Par dimension il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $x \in F \cap G$.
Comme $x \in F$ il existe $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que
$$x = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(\xi)$$
et comme $x \in G$
$$\forall k \in [\![0, d-1]\!], \varphi(u^k(x)) = 0.$$

On peut alors procéder par récurrence descendante ou bien utiliser un argument de minimalité (terminaison).
Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![0, d-1]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.
Posons

$$k_0 = \max\left(\{k \in [\![0, d-1]\!] | a_k \neq 0\}\right)$$

qui est alors bien défini (maximum d'un ensemble fini non vide).
On a

$$x = \sum_{k=0}^{k_0} a_k u^k(\xi)$$

en appliquant $u^{(d-1)-(k_0)}$

$$u^{(d-1)-k_0}(x) = \sum_{k=0}^{k_0} a_k u^{(d-1)-(k_0-k)}(\xi)$$

puis φ,

$$\varphi(u^{(d-1)-k_0}(x)) = \sum_{k=0}^{k_0} a_k \varphi(u^{(d-1)-(k_0-k)}(\xi))$$

Comme $(d-1) - k_0 \in [\![0, d-1]\!]$ et $x \in G$, et par définition de φ:

$$\begin{cases} \varphi(u^{(d-1)-k_0}(x)) = 0 \\ \forall k \in [\![0, k_0 - 1]\!], \varphi(u^{\overbrace{(d-1)-(k_0-k)}^{<d-1}}(\xi)) = 0 \\ \varphi(u^{(d-1)-(k_0-k_0)}(\xi)) = 1 \end{cases}$$

et donc l'égalité précédente se réécrit

$$0 = a_{k_0}$$

ce qui est absurde.
Donc pour tout k, $a_k = 0$ c'est à dire $x = 0_E$.
Donc $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$ et par dimension, comme $\dim(F) + \dim(G) \geq \dim(E)$,

$$\boxed{F \oplus G = E}.$$

2.23. Soit $\widetilde{B}$ une base de G.
Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\pi_{u,\xi}} & 0_{d,n-d} \\ 0_{n-d,d} & \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_G) \end{pmatrix}$$

- On a vu dans les questions précédentes que la famille $(\xi, u(\xi), \ldots, u^{d-1}(\xi))$ est une base de F.
- De plus $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une base de G.
- Comme F et G sont supplémentaires, on en déduit que $\mathcal{B} = ((\xi, u(\xi), \ldots, u^{d-1}(\xi)), \widetilde{\mathcal{B}})$ est une $\boxed{\text{base de } E}$, adaptée à $F \oplus G = E$.
- Comme F et G sont stables par u on en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ admet l'écriture par blocs suivante:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{(\xi,u(\xi),\ldots,u^{d-1}(\xi))}(u_F) & 0_{d,n-d} \\ 0_{n-d,d} & \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_G) \end{pmatrix}.$$

  [Faire un schéma]
- De plus on a déjà vu que (quitte à prendre $\pi_{u,\xi}$ unitaire), avec

$$\pi_{u,\xi} = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

  on a

$$\forall j \in [\![0, d-2]\!], u(u^j(\xi)) = u^{j+1}(\xi)$$

et (comme $\pi_{u,\xi}(u)(\xi) = 0_E$)

$$u(u^{d-1}(\xi)) = u^d(\xi) = \sum_{i=0}^{d-1}(-a_i)u^i(\xi)$$

ce qui donne

$$\mathrm{Mat}_{(\xi,u(\xi),\dots,u^{d-1}(\xi))}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{\pi_{u,\xi}}$$

[Faire un schéma]

- On en déduit donc que

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\pi_{u,\xi}} & 0_{d,n-d} \\ 0_{n-d,d} & \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_G) \end{pmatrix}}$$

2.24. Conclure par une récurrence bien choisie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons

$\mathcal{R}_n$: «tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie impaire et $\dim(E) \leq n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$»

et procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque: cela revient à faire une récurrence forte sur tous les entiers d tels que d est impair.

- **Initialisation**: Pour $n = 1$ tout endomorphisme d'un ev de dimension 1 est une homothétie et donc tout vecteur non nul est un vecteur propre. D'où $\mathcal{R}_1$.
- **Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{R}_n$.
  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire inférieure à $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Soient d, ξ, F et G construits comme aux questions précédentes.
  En particulier $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ donc $\dim(F)$ est impaire ou $\dim(G)$ est impaire.
  On procède par disjonction de cas
  - ▷ Si $\dim(F) = d$ est impaire (et éventuellement égale à $\dim(E)$).
    Alors $\pi_{u,\xi}$ est de degré impair. Par (♠) $\pi_{u,\xi}$ admet une racine. Donc par **2.2.** $\mathcal{C}_{\pi_{u,\xi}}$ admet un vecteur propre.
    Et donc par la question **2.23.** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et donc u admet un vecteur propre.
  - ▷ Si $\dim(G) = \dim(E) - d$ est impaire.
    Comme $d \geq 1$ on a $\dim(G) \leq \dim(E) - 1 \leq n$, et par hypothèse de récurrence $\mathcal{R}_n$ appliquée à l'ev G et l'endomorphisme u_G, u_G admet un vecteur propre.
    Donc u admet un vecteur propre.

  Dans tous les cas u admet un vecteur propre.
- **Conclusion**: on a montré $\mathcal{R}_1$ et $\forall n \in \mathcal{N}^*, \mathcal{R}_n \Rightarrow \mathcal{R}_{n+1}$.
  Par récurrence on a donc

  «Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie impaire et $\dim(E) \leq n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$.»

  d'où (comme tout ev de dimension finie admet une dimension finie)

  «Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie impairevérifie la propriété $\mathcal{P}_1$.»

  c'est à dire

  $$\boxed{\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)}.$$

2.V. Propriétés du corps des complexes

On cherche dans cette partie à montrer que $\mathbb{C}$ vérifie les conditions (■) et (♠).

2.25. Montrer que $\mathbb{C}$ vérifie (■).

On remarque que par le Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout $r \geq 0$ le polynôme réel $X^2 - r$ admet une (unique) racine positive, notée $\sqrt{r}$.

Soit $\Delta \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta = 0$ alors $X^2 - 0$ admet 0 comme racine double.
- Si $\Delta \neq 0$.
  - ▷ **Première méthode (forme exponentielle)**: Soient $r \in]0, +\infty[$ tels que

$$\Delta = re^{i\theta}$$

alors

$$\left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \Delta$$

et donc $\boxed{X^2 - \Delta \text{ admet une racine}}$.

▷ **Variante (forme algébrique)**: Avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\Delta = a + ib$$

on cherche par analyse-synthèse $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

Analyse: supposons que $(x + iy)^2 = a + ib$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Alors par indentification des parties réelles et imaginaires, (et en écrivant de plus l'égalité des modules)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ xy = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Les deux premières équations déterminant alors $|x|$ et $|y|$ tandis que la dernière déterminant leur signe.
Synthèse: si $b = 0$ et $a > 0$ alors $\pm(\sqrt{a} + 0i)$ convient et si $a < 0$ alors $\pm(0 + i\sqrt{-a})$ convient.
Si $b \neq 0$ alors

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\,\text{signe}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$$

convient.
Dans tous les cas $\boxed{X^2 - \Delta \text{ admet une racine}}$.

On cherche désormais à montrer que $\mathbb{C}$ vérifie (♠).

2.26. Montrer à l'aide des parties précédentes que pour tout corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ vérifie (♠) **ssi** $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$: il s'agit exactement du résultat de la partie 2.IV.
- $\boxed{\Leftarrow}$: si $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$ en particulier toute matrice compagnon d'un polynôme impair admet une racine donc par la partie 2.I le corps $\mathbb{K}$ vérifie (♠).

On cherche par conséquent à démontrer $\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}}(1)$.

2.27. Montrer que $\mathbb{R}$ vérifie (♠) et en déduire $\mathcal{H}^1_{\mathbb{R}}(1)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. La fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
- est continue
- si le coefficient dominant de P est positif, $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, tandis que si le coefficient dominant de P est négatif, $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$

donc, dans tous les cas, Théorème des Valeurs Intermédiaires $x \mapsto P(x)$ s'annule c'est à dire P admet une racine.
Donc $\boxed{\mathbb{R} \text{ vérifie (♠)}}$ et par la question précédente, $\boxed{\mathcal{H}^1_{\mathbb{R}}(1)}$.

On fixe désormais E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel tel que $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$ où n impair, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On fixe aussi $\mathcal{B}$ une base de E et on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Étant donnée $M \in M_n(\mathbb{C})$ on note $M^\dagger = \overline{M^\top}$ la transconjuguée de M c'est à dire la matrice de taille $n \times n$ définie par, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$, $(M^\dagger)_{i,j} = \overline{(M)_{j,i}}$.

On note aussi $H_n(\mathbb{C}) = \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \middle| M^\dagger = M\right\}$.

2.28. Montrer que $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$.

L'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-ev donc aussi un $\mathbb{R}$-ev.
Montrons que l'application de transconjugaison

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\\ A &\mapsto A^\dagger\end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire. Soient $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$. Comme λ_1 et λ_2 sont réels,

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^\dagger = \overline{\lambda_1 A_1^\top + \lambda A_2^\top} = \lambda_1 \overline{A_1^\top} + \lambda_2 \overline{A_2^\top} = \lambda_1 A_1^\dagger + \lambda_2 A_2^\dagger$$

d'où la $\mathbb{R}$-linéarité.
(Par ailleurs on remarque que l'application est involutive: pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $(A^\dagger)^\dagger = A$, et que pour tous $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $(A_1 A_2)^\dagger = {A_2}^\dagger {A_1}^\dagger$).
Comme $H_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(A \mapsto \frac{A - A^\dagger}{2})$ on en déduit que $\boxed{H_n(\mathbb{C}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.
Déterminons la dimension de ce $\mathbb{R}$-ev.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En notant $\mathrm{Re}(A) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (reps. $\mathrm{Im}(A)$) la matrice réelle dont les coefficients sont les parties réelles (reps. imaginaires) de A on a $A = \mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A)$ (et cette écriture est unique) et donc

$$A^\dagger = (\mathrm{Re}(A))^\top - i(\mathrm{Im}(A))^\top.$$

Par conséquent

$$A \in H_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(A) \in S_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Im}(A) \in A_n(\mathbb{R}))$$

ou encore, en tant que $\mathbb{R}$-sevs de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (comme $S_n(\mathbb{R}) \cap iA_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$)

$$H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus (iA_n(\mathbb{R})).$$

Comme

$$\dim_{\mathbb{R}}(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

on en déduit

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2}.$$

Remarque: pour déterminer la dimension on aurait aussi pu expliciter une base de $H_n(\mathbb{C})$ ou encore écrire $H_n(\mathbb{C})$ comme le noyau du projecteur $A \mapsto \frac{A - A^\dagger}{2}$

On définit $R_A, I_A \in \mathcal{L}(H_n(\mathbb{C}))$ par

$$R_A : \begin{aligned}H_n(\mathbb{C}) &\to H_n(\mathbb{C})\\ B &\mapsto \frac{1}{2}\left(AB + (AB)^\dagger\right)\end{aligned}$$

.

$$I_A : \begin{aligned}H_n(\mathbb{C}) &\to H_n(\mathbb{C})\\ B &\mapsto \frac{1}{2i}\left(AB - (AB)^\dagger\right)\end{aligned}$$

2.29. Montrer que R_A et I_A sont bien définies sont $\mathbb{R}$-linéaires et commutent.

- Soit $B \in n(\mathbb{C})$.

On a par $\mathbb{R}$-linéarité et caractère involutif de la transconjugaison,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\left(AB+(AB)^\dagger\right)\right)^\dagger &= \frac{1}{2}\left((AB)^\dagger+((AB)^\dagger)^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((AB)^\dagger+AB\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB+(AB)^\dagger\right)\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2}\left(AB+(AB)^\dagger\right)\in H_n(\mathbb{C})$.
D'où la $\boxed{\text{bonne définition de } R_A : H_n(\mathbb{C})\to H_n(\mathbb{C})}$.
De même, comme de plus pour toute matrice M, $(iM)^\dagger=-iM^\dagger$ on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2i}\left(AB-(AB)^\dagger\right)\right)^\dagger &= -\frac{1}{2i}\left((AB)^\dagger-((AB)^\dagger)^\dagger\right)\\ &= -\frac{1}{2i}\left((AB)^\dagger-AB\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(AB-(AB)^\dagger\right)\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2i}\left(AB-(AB)^\dagger\right)\in H_n(\mathbb{C})$.
D'où la $\boxed{\text{bonne définition de } I_A : H_n(\mathbb{C})\to H_n(\mathbb{C})}$.

- Par $\mathbb{R}$-bilinéarité du produit et $\mathbb{R}$-linéairité de la transconjugaison, $\boxed{R_A \text{ et } I_A \text{ sont } \mathbb{R}\text{-linéaires}}$.
- Pour tout $B\in H_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}(R_A\circ I_A)(B) &= \frac{1}{2}\left(AI_A(B)+(AI_A(B))^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A(AB-(AB)^\dagger)-(A((AB)-(AB)^\dagger))^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B-A(AB)^\dagger-(A^2B)^\dagger+(A(AB)^\dagger)^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B-AB^\dagger A^\dagger-(A^2B)^\dagger+ABA^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B-(A^2B)^\dagger\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de $B=B^\dagger$.
De même,

$$\begin{aligned}(I_A\circ R_A)(B) &= \frac{1}{2i}\left(AR_A(B)-(AR_A(B))^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A(AB+(AB)^\dagger)-(A((AB)+(AB)^\dagger))^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B+A(AB)^\dagger-(A^2B)^\dagger-(A(AB)^\dagger)^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B+AB^\dagger A^\dagger-(A^2B)^\dagger-ABA^\dagger\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2B-(A^2B)^\dagger\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de $B=B^\dagger$.
On obtient donc que pour tout $B\in\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $(R_A\circ I_A)(B)=(I_A\circ R_A)(B)$.
D'où $\boxed{R_A \text{ et } I_A \text{ commutent}}$.

2.30. En déduire qu'il existe $B\in H_n(\mathbb{C})\backslash\{0\}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{aligned}R_A(B) &= aB\\ I_A(B) &= bB\end{aligned}$$

D'après **2.27.** on a $\mathcal{H}^1_{\mathbb{R}}(1)$ et d'après la partie 2.II on a donc $\mathcal{H}^2_{\mathbb{R}}(1)$.
On a n impair d'où $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$ est impaire, donc on en déduit que R_A et I_A admettent un vecteur propre commun.
Il existe donc a et b réels et $B \in H_n(\mathbb{C})$ non nul tels que B est vecteur propre de R_A et I_A de valeurs propres respectives a et b, i.e

$$\boxed{\begin{aligned} R_A(B) &= aB \\ I_A(B) &= bB \end{aligned}}$$

2.31. Montrer que $AB = (a+ib)B$.

On a

$$(R_A + iI_A)(B) = AB$$

et par conséquent

$$\boxed{AB = (a+ib)B}.$$

2.32. Conclure.

On a donc construit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que

$$AB = \lambda B$$

d'où (question **2.10.**) A admet un vecteur propre ce qui équivaut à $\boxed{u \text{ admet une valeur propre}}$.
Donc pour tout n impair, pour tout E, $\mathbb{C}$-ev de dimension n, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un vecteur propre.
On a bien

$$\boxed{\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}}(1)}$$

c'est à dire $\boxed{\mathbb{C} \text{ vérifie la propriété } (\spadesuit)}$.

2.VI. Conclusion

2.33. Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps vérifiant les conditions (■) et (♠) (et $2 \neq 0$) alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{K}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps vérifiant les conditions (■) et (♠).
Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que pour tout k, $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$.

- **Initialisation:** comme $\mathbb{K}$ vérifie la propriété (♠), par la partie 2.IV on a $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$.
- **Hérédité:** soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{K}$ vérifie (■) par la partie 2.III on a $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k) \Rightarrow \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1)$ et par la partie 2.II, $\mathcal{H}^2_{\mathbb{K}}(k) \Leftrightarrow \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k)$ d'où
$$\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k) \Rightarrow \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1).$$
- **Conclusion**: on a montré $\mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k) \Rightarrow \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k+1)$ d'où, par récurrence
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}^1_{\mathbb{K}}(k).$$

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, comme il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\nu_2(\dim(E)) \leq k$ on en déduit que E vérifie $\mathcal{P}_1$.
Et donc tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle admet un vecteur propre.
C'est en particulier vrai pour toute application linéaire canoniquement associée à toute matrice compagnon de tout polynôme de degré non nul et donc par la partie 2.I

$$\boxed{\text{«Tout polynôme non constant de } \mathbb{K}[X] \text{ admet une racine dans } \mathbb{K}.\text{»}}$$

2.34. Déduire de la question précédente et de la partie 2.V que tout polynôme complexe non constant admet une racine.

Par la partie 2.V, le corps $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés (■) et (♠).
Donc par la question **2.33.** on a

$$\boxed{\text{«Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \text{ admet une racine dans } \mathbb{C}.\text{»}}$$

Références

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Proofs from the Book*. Springer, 1999.

[2] Harm Derksen. The fundamental theorem of algebra and linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, 2003.

[3] Michael Eisermann. The fundamental theorem of algebra made effective: an elementary real-algebraic proof via sturm chains. *The American Mathematical Monthly*, 2012.