Cesàro et passe-bas

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

1. Exemples explicites

On cherche dans cette partie à étudier de manière explicite la convergence de suites et séries géométriques.

1.I. Suites géométriques de module 1

1.1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer $\left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right|$ en fonction de θ (et indépendamment de n).

1.2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Déduire de la question précédente que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1.3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$ en fonction de θ et n.
Indication: on pourra distinguer les cas $\theta \equiv 0[2\pi]$ *et* $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.

1.4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas.

1.II. Séries géométriques de module 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$$

et

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) e^{ik\theta}.$$

1.5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\theta \mapsto S_n(\theta)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de S_n, C_n et n.

1.7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déduire de la question précédente une expression de $C_n(\theta)$ en fonction de θ et de n.

1.8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $(C_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $(C_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas.

2. Cesàro et Abel

2.I. Cesàro pour les suites

Dans les questions **2.9.** à **2.11.** on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2.9. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}$.

2.10. Soit $\varepsilon > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2.11. Conclure que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On considère désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ quelconque.

2.12. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}. \qquad \text{(Cesàro)}$$

Cette implication sera notée (Cesàro) dans la suite du sujet.

2.13. Montrer que la réciproque de l'implication (Cesàro) est fausse.

2.II. Transformée d'Abel

2.14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((u_{k+1} - u_k)v_k + (v_{k+1} - v_k)u_{k+1}) = u_n v_n - u_0 v_0.$$

2.15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k = v_n \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1}\left((v_{k+1} - v_k)\sum_{j=0}^{k} u_j\right)} \qquad \text{(Abel)}$$

Cette égalité sera notée (Abel) dans la suite du sujet.

2.III. Cesàro version série à l'aide d'Abel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

2.16. À l'aide de (Abel) et (Cesàro) montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

2.17. Que dire de la réciproque de l'implication de la question **2.16.** ?

2.18. On suppose de plus dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que la réciproque de l'implication de la question **2.16.** est vraie dans ce cas.

3. Une réciproque Taubérienne partielle

Dans toute cette partie on considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{C}$, et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k,$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k.$$

3.19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = C_n + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k u_k$$

3.20. En déduire que **si**

$$u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3.21. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$.
Montrer que

$$S_n = \frac{mC_m - nC_n}{m-n} - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{m-k}{m-n} u_k.$$

3.22. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq n \leq m$.
Montrer que

$$\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k} \leq \int_{n-1}^{m-1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Dans les questions **3.23.** à **3.24.** on suppose de plus que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq \dfrac{1}{n} \\ C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{cases}$$

3.23. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \geq \max\left(2, \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1\right)$,

$$|S_n| \leq \frac{\lfloor \delta n \rfloor + n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_{\lfloor \delta n \rfloor + n}| + \frac{n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_n| + \ln\left(1 + \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{n-1}\right).$$

3.24. Déduire de la question précédente que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On considère désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ quelconque.

3.25. Conclure que **si**

$$u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

4. Fonctions passe-bas

On dit qu'une fonction $\chi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est passe-bas ssi $\chi(0) = 1$ et pour tout $t \geq 1$, $\chi(t) = 0$.

4.I. Passe-bas lisses

On dit qu'une fonction passe-bas χ est lisse ssi $\chi \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\chi_{|[0,\delta]} = 1$.
On considère dans la suite

$$g(t) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

4.26. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
- $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(t) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

4.27. Soit $\delta \in]0, 1[$.
Montrer que

$$\chi : t \mapsto \frac{g(1-t)}{g(1-t) + g(t-\delta)}$$

est un passe-bas lisse.

4.II. Passe-bas acceptables

On dit qu'une fonction passe-bas χ est acceptable ssi
- **continuité en** 0:

$$\chi(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 1,$$

- **variations bornées**: il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour toute subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| \leq C.$$

Rappel: On rappelle qu'une subdivision de $[0, 1]$ *est une liste* $(t_0, \ldots, t_N)$ *telle que* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$.

4.28. Montrer qu'une fonction passe-bas continue en 0 et décroissante est acceptable.

4.29. Montrer qu'une fonction passe-bas telle que $\chi_{|[0,1]} \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ est acceptable.

4.30. Montrer que

$$\chi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ \left(1 + t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

n'est **pas** un passe-bas acceptable.

---

5. Théorème de χ-Cesàro

Il n'est conseillé de n'aborder cette partie que si tout le reste du sujet a été traité.

Dans toute cette partie on fixe χ une fonction passe-bas acceptable.
On considère de plus une suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

5.31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_k \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k$ converge.

On dit que la série $\displaystyle\sum_k u_k$ est $\underline{\chi\text{-convergente}}$ ssi la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \chi\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Dans ce cas on note $S_\chi(u)$ la limite de cette suite, c'est-à-dire

$$S_\chi(u) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k.$$

On cherche désormais à démontrer le théorème suivant:

Théorème de χ-Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Si la série

$$\sum_k u_k \text{ converge}$$

alors

$$\sum_k u_k \text{ est } \chi\text{-convergente.}$$

Et dans ce cas

$$S_\chi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

5.32. Commenter le théorème de χ-Cesàro dans les cas $\chi : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$ et $\chi : t \mapsto (1-t)\mathbb{1}_{[0,1[}(t)$.

5.33. On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\chi\left(\frac{k}{n}\right) - \chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k} u_j\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5.34. En déduire le théorème de χ-Cesàro.

FIN DU SUJET