**En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.**

# 1. Exemples explicites

On cherche dans cette partie à étudier de manière explicite la convergence de suites et séries géométriques.

## 1.I. Suites géométriques de module 1

**1.1.** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer $\left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right|$ en fonction de $\theta$ (et indépendamment de $n$).

Par la formule de l'angle moitié on a

$$\left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right| = |e^{i\theta} - 1| = \boxed{2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

**1.2.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ .
Déduire de la question précédente que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- **Si** $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et donc $\boxed{\text{converge vers 1}}$.
- **Si** $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ .
  Si par l'absurde $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors par opérations sur les limites on a
  $$\lim_{n\to+\infty} |e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}| = |\ell - \ell| = 0$$
  c'est-à-dire par la question **1.1.** que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ ce qui est absurde.
  Donc $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{diverge}}$.
  Remarque: cette preuve par l'absurde revient à une divergence grossière de la série télescopique.

**1.3.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$ en fonction de $\theta$ et $n$.
*Indication: on pourra distinguer les cas $\theta \equiv 0[2\pi]$ et $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.*

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$.
- **Si** $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $e^{i\theta} = 1$ et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = n}$.
- **Si** $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $e^{i\theta} \neq 1$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}}$.

**1.4.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas.

- **Si** $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right) = 1$ et donc la suite $\boxed{\text{converge vers 1}}$.
- **Si** $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  $$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

De plus $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$

et donc $\left(\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0, la suite $\boxed{\text{converge vers } 0}$.

## 1.II. Séries géométriques de module 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$$

et

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) e^{ik\theta}.$$

**1.5.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge,
- si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Comme $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (car de module 1), $\boxed{(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$ grossièrement.

**1.6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\theta \mapsto S_n(\theta)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de $S_n$, $C_n$ et $n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ est dérivable, par conséquent $S_n$ est dérivable et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$S_n'(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} ike^{ik\theta}.$$

Or pour pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$C_n(\theta) = S_n(\theta) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke^{ik\theta}$$

d'où

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, S_n'(\theta) = in(S_n(\theta) - C_n(\theta))}$$

**1.7.** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déduire de la question précédente une expression de $C_n(\theta)$ en fonction de $\theta$ et de $n$.

On procède par disjonction de cas,
- **Si** $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) \\ &= n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= n - \frac{n(n-1)}{2n} \\ &= \boxed{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

- **Si** $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors, par caractère local de la dérivée on a

$$\begin{aligned} S_n'(\theta) &= \frac{(-ine^{in\theta})(1-e^{i\theta}) - (-ie^{i\theta})(1-e^{in\theta})}{(1-e^{i\theta})^2} \\ &= \frac{-ine^{in\theta} + ine^{i(n+1)\theta} + ie^{i\theta} - ie^{i(n+1)\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \\ &= i\left(\frac{e^{i\theta} + (n-1)e^{i(n+1)\theta} - ne^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right) \end{aligned}$$

et comme $C_n(\theta) = S_n(\theta) - \frac{1}{in}S_n'(\theta)$ on en déduit que

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &= \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} - \frac{1}{n}\left(\frac{e^{i\theta} + (n-1)e^{i(n+1)\theta} - ne^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right) \\ &= \frac{(1-e^{i\theta})(1-e^{in\theta}) - \frac{1}{n}e^{i\theta} - \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i(n+1)\theta} + e^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \\ &= \boxed{\frac{1 - e^{i\theta} - \frac{1}{n}e^{i\theta} + \frac{1}{n}e^{i(n+1)\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}} \\ &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta}}{n}\frac{1-e^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \end{aligned}$$

Remarque: on a ici présenté une méthode calculatoire "sans réflexion" du calcul. Il aurait été possible d'effectuer de manière plus réfléchie les calculs afin de réduire leur complexité.

**1.8.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $(C_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ alors $(C_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite dans ce cas.

- **Si** $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $(C_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{diverge}}$ (car tend vers $+\infty$).
- **Si** $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, alors par la question **1.7.**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(\theta) = \frac{1}{1-e^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta}}{n}\frac{1-e^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}.$$

De plus $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car de module inférieur à $\frac{2}{4\sin(\frac{\theta}{2})^2}$) et donc

$$\frac{e^{i\theta}}{n}\frac{1-e^{in\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où

$$\boxed{C_n(\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-e^{i\theta}}}.$$

---

# 2. Cesàro et Abel

## 2.I. Cesàro pour les suites

Dans les questions **2.9.** à **2.11.** on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**2.9.** Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}$.

Par définition de la limite il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc pour tout $n \geq N_1$, par inégalité triangulaire on a

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n-1}|u_k|$$
$$\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| + \frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

et donc on a bien

$$\boxed{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

**2.10.** Soit $\varepsilon > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\sum_{k=0}^{N_1}u_k$ est une constante on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et en particulier par définition de la limite il existe $N_2 \geq N_1$ (quitte à prendre le maximum on peut prendre $N_2 \geq N_1$) tel que pour tout $n \geq N_2$,

$$\boxed{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}}.$$

**2.11.** Conclure que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la question **2.9.** il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right| \leq \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}u_k\right| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Une fois ce $N_1$ fixé, par la question **2.10.** il existe $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1}u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On a donc pour tout $n \geq N_2$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

On a donc bien par définition de la limite,

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

On considère désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ quelconque.

**2.12.** Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
Montrer que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}. \qquad \text{(Cesàro)}$$

Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors $(u_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc par la question **2.11.**,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \ell) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) - \ell$$

et donc on a bien

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}.$$

Cette implication sera notée (Cesàro) dans la suite du sujet.

**2.13.** Montrer que la réciproque de l'implication (Cesàro) est fausse.

Par la partie 1 avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, par exemple $\theta = \pi$ on a

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \text{ et } \neg\left(e^{in\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)}.$$

## 2.II. Transformée d'Abel

**2.14.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}((u_{k+1} - u_k)v_k + (v_{k+1} - v_k)u_{k+1}) = u_n v_n - u_0 v_0.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(u_{k+1} - u_k)v_k + (v_{k+1} - v_k)u_{k+1} &= u_{k+1}v_k - u_k v_k + v_{k+1}u_{k+1} - v_k u_{k+1}\\ &= u_{k+1}v_k - u_k v_k + v_{k+1}u_{k+1} - v_k u_{k+1}\\ &= u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par somme télescopique on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}((u_{k+1} - u_k)v_k + (v_{k+1} - v_k)u_{k+1}) = u_n v_n - u_0 v_0}.$$

Par linéarité de la somme on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}((u_{k+1} - u_k)v_k) = (u_n v_n - u_0 v_0) - \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)u_{k+1}}.$$

**2.15.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k = v_n \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1}\left((v_{k+1} - v_k)\sum_{j=0}^{k} u_j\right)} \qquad \text{(Abel)}$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

On constate alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{k+1} - S_k = u_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant **2.14.** à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) v_k \\ &= S_n v_n - \underbrace{S_0}_{=0} v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) S_{k+1}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k = v_n \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \sum_{j=0}^{k} u_j}.$$

Remarque: alternativement on aurait aussi pu partir du terme de droite et calculer une somme double.

Cette égalité sera notée (Abel) dans la suite du sujet.

## 2.III. Cesàro version série à l'aide d'Abel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

**2.16.** À l'aide de (Abel) et (Cesàro) montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par (Abel) on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k &= \left(1 - \frac{n}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(1 - \frac{k+1}{n}\right) - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \sum_{j=0}^{k} u_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} u_j\right)\end{aligned}$$

et comme $\sum_{j=0}^{k} u_j \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, par (Cesàro) on en déduit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}.$$

**2.17.** Que dire de la réciproque de l'implication de la question **2.16.** ?

La réciproque de l'implication de la question **2.16.** est fausse.
En effet, par la partie 1 avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, par exemple $\theta = \pi$ on a

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) e^{ik\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1 - e^{i\theta}}\right) \text{ et } \neg \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1 - e^{i\theta}}\right)}.$$

**2.18.** On suppose de plus dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et $\ell \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que la réciproque de l'implication de la question **2.16.** est vraie dans ce cas.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en tant que somme de termes positifs.
De plus (faire un schéma), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $1-\frac{k}{2n} \geq \frac{1}{2}$ et que tous les termes sont positifs,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &\leq 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)u_k \\ &\leq 2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)u_k.\end{aligned}.$$

Or la suite $\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc majorée.
Donc $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ est majorée.
Par théorème de convergence monotone, il existe $\widetilde{\ell} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{\ell}.$$

Par la question **2.16.** on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{\ell}.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = \widetilde{\ell}$.
Et donc on a bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}.$$

Remarque: une méthode alternative est la suivante:
Comme $\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante il existe $\widetilde{\ell} \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{\ell}.$$

Mais il se trouve que le résultat (Cesàro) reste vraie dans le cas d'une suite réelle et d'une limite $+\infty$ (juste adapter la preuve) et donc le résultat de la question **2.16.** reste vrai pour une limite infinie.
On conclut alors que $\widetilde{\ell} = \ell$.

---

## 3. Une réciproque Taubérienne partielle

Dans toute cette partie on considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{C}$, et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k,$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)u_k.$$

**3.19.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = C_n + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k u_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\right) u_k \\ &= C_n + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k u_k \end{aligned}$$

Remarque: on aurait aussi pu utiliser (Abel) en constatant tout d'abord que $C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$.

**3.20.** En déduire que **si**

$$u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**alors**

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Supposons que $u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
Alors, par définition,

$$k u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et donc par (Cesàro) on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

autrement dit par la question **3.19.** on a

$$S_n = C_n + o_{n\to+\infty}(1).$$

En particulier

$$\boxed{C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}.$$

**3.21.** Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$.
Montrer que

$$S_n = \frac{mC_m - nC_n}{m-n} - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{m-k}{m-n} u_k.$$

Par exemple voici la preuve par calcul de somme:

$$\begin{aligned} mC_m - nC_n &= \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)u_k - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((m-k) - (n-k)u_k\right) + \sum_{k=n}^{m-1} (m-k)u_k \\ &= (m-n)S_n + \sum_{k=n}^{m-1} (m-k)u_k \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\boxed{S_n = \frac{mC_m - nC_n}{m-n} - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{m-k}{m-n} u_k}.$$

**3.22.** Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq n \leq m$.
Montrer que

$$\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k} \leq \int_{n-1}^{m-1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

La fonction $\begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$ est décroissante.
Soit $k \geq 2$.
On a donc

$$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale on a donc

$$1 \times \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

En sommant pour $k$ de $n$ à $m-1$ (comme $2 \leq n$), par relation de Chasles on a donc bien

$$\boxed{\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k} \leq \int_{n-1}^{m-1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t}.$$

Dans les questions **3.23.** à **3.24.** on suppose de plus que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq \dfrac{1}{n} \\ C_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \end{cases}$$

**3.23.** Montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \geq \max\left(2, \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1\right)$,

$$|S_n| \leq \frac{\lfloor \delta n \rfloor + n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_{\lfloor \delta n \rfloor + n}| + \frac{n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_n| + \ln\left(1 + \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{n-1}\right).$$

Soit $\delta > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \max\left(2, \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1\right)$.
Comme $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1$, on a en particulier $n > \frac{1}{\delta}$ et donc $\lfloor \delta n \rfloor \geq 1$; comme de plus $n \geq 2$, les dénominateurs sont non nuls et la question **3.22.** sera applicable.
En appliquant **3.21.** avec $m = \lfloor \delta n \rfloor + n > n$ on a donc

$$S_n = \frac{(n + \lfloor \delta n \rfloor) C_{\lfloor \delta n \rfloor + n} - n C_n}{\lfloor \delta n \rfloor} - \sum_{k=n}^{\lfloor \delta n \rfloor + n - 1} \frac{n + \lfloor \delta n \rfloor - k}{\lfloor \delta n \rfloor} u_k$$

d'où par inégalité triangulaire on a

$$|S_n| \leq \frac{\lfloor \delta n \rfloor + n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_{\lfloor \delta n \rfloor + n}| + \frac{n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_n| + \sum_{k=n}^{n + \lfloor \delta n \rfloor - 1} \frac{n + \lfloor \delta n \rfloor - k}{\lfloor \delta n \rfloor} |u_k|.$$

De plus, par somme de termes positifs, puis l'hypothèse sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis la question **3.22.**

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+\lfloor\delta n\rfloor-1}\frac{n+\lfloor\delta n\rfloor-k}{\lfloor\delta n\rfloor}|u_k| &\leq \sum_{k=n}^{n+\lfloor\delta n\rfloor-1}|u_k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+\lfloor\delta n\rfloor-1}\frac{1}{k} \\ &\leq \int_{n-1}^{n+\lfloor\delta n\rfloor-1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \ln\left(\frac{n+\lfloor\delta n\rfloor-1}{n-1}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{n-1}\right).\end{aligned}$$

Et donc on a bien

$$\boxed{|S_n| \leq \frac{\lfloor\delta n\rfloor+n}{\lfloor\delta n\rfloor}|C_{\lfloor\delta n\rfloor+n}| + \frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}|C_n| + \ln\left(1+\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{n-1}\right)}.$$

**3.24.** Déduire de la question précédente que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $\lfloor\delta n\rfloor \sim_{n\to+\infty} \delta n$, on a pour tout $\delta > 0$,

$$\ln\left(1+\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+\delta).$$

  Fixons $\delta > 0$ tel que

$$\ln(1+\delta) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

  En particulier comme $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad \ln\left(1+\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{n-1}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Notons dans la suite $N_0 = \left\lfloor\frac{1}{\delta}\right\rfloor + 1$.
- De même qu'au point précédent, comme

$$\begin{aligned}\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor} &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\delta}, \\ |C_n| &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

  on a

$$\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}|C_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  Donc il existe $N_2 \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N_2$,

$$\frac{n}{\lfloor\delta n\rfloor}|C_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- De même qu'au point précédent, comme

$$\begin{aligned}\frac{\lfloor\delta n\rfloor+n}{\lfloor\delta n\rfloor} &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\frac{1}{\delta}, \\ |C_{\lfloor\delta n\rfloor+n}| &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

  on a

$$\frac{\lfloor\delta n\rfloor+n}{\lfloor\delta n\rfloor}|C_{\lfloor\delta n\rfloor+n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  Donc il existe $N_3 \geq N_2$ tel que pour tout $n \geq N_3$,

$$\frac{\lfloor \delta n \rfloor + n}{\lfloor \delta n \rfloor} |C_{\lfloor \delta n \rfloor + n}| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Par conséquent, pour tout $n \geq \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$, on a

$$|S_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on peut donc conclure que

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

On considère désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ quelconque.

**3.25.** Conclure que **si**

$$u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**alors**

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Supposons que $u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
On remarque que le sens

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

a déjà été à la question **2.16.**.
Supposons que $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
On a en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Et donc, en particulier

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De plus

$$v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque: n'importe quelle suite qui est un $O(\frac{1}{n})$ et dont la série converge vers un réel non nul (et donc après renormalisation vers 1) conviendrait à la place de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alternativement plutôt que d'effectuer une telle translation, on peut modifier le premier terme de la suite.
On constate que

$$u_n - \ell v_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc comme toute suite bornée ÀPCR est bornée il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \ell v_n| \leq \frac{C}{n}.$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{u_n} = \frac{u_n - \ell v_n}{C}.$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\widetilde{u_n}| \leq \frac{1}{n}.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widetilde{u_k} = \frac{1}{C} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k - \ell \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) v_k \right)$$

d'où (combinaison linéaire de limites),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widetilde{u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par la question **3.24.**, on en déduit que

$$\frac{1}{C} \left( \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \sum_{k=0}^{n-1} v_k \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}.$$

---

# 4. Fonctions passe-bas

On dit qu'une fonction $\chi : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est passe-bas ssi $\chi(0) = 1$ et pour tout $t \geq 1$, $\chi(t) = 0$.

## 4.I. Passe-bas lisses

On dit qu'une fonction passe-bas $\chi$ est lisse ssi $\chi \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\chi_{|[0,\delta]} = 1$.
On considère dans la suite

$$g(t) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

**4.26.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
- $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(t) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}_n$ la proposition:

$$\text{«}g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et il existe un polynôme } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases} \text{»}.$$

► **Initialisation**
On a par caractère local de la continuité $g$ est continu en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
De plus

$$e^{-\frac{1}{t^2}} \xrightarrow[t\to0]{} 0$$

et donc $g$ est continue en 0.
Comme $P_0 = 1$ convient on a donc $\mathcal{Q}_0$ vraie.

► **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}_n$.
Il existe donc un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Par caractère local de la dérivabilité, on a $g^{(n)}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et on a

$$\forall t < 0,\ g^{(n+1)}(t) = 0.$$

$$\forall t > 0,\ g^{(n+1)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2}P_n'\left(\frac{1}{t}\right) + P_n\left(\frac{1}{t}\right)\frac{2}{t^3}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}$$

et donc en posant

$$P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$$

on a

$$\forall t > 0,\ g^{(n+1)}(t) = P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

De plus pour tout $t < 0$ on a

$$\frac{g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)}{t - 0} = 0$$

et pour tout tout $t > 0$ on a

$$\frac{g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)}{t - 0} = \frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}.$$

Or par croissance comparée on a

$$\frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} 0$$

Donc on en déduit que

$$\frac{g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)}{t} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t\neq 0}]{} 0$$

et donc par théorème de limite de la dérivée on a $g^{(n)}$ dérivable en 0 et $g^{(n+1)}(0) = 0$.
Par conséquent on a bien $g \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$g^{(n+1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

▶ **Conclusion**
Par récurrence on a donc $\mathcal{Q}_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}}$.

**4.27.** Soit $\delta \in ]0, 1[$.
Montrer que

$$\chi : t \mapsto \frac{g(1-t)}{g(1-t) + g(t-\delta)}$$

est un passe-bas lisse.

Soit $t \in \mathbb{R}$ on procède par disjonction de cas:
- Si $t \geq 1$ alors $1 - t \leq 0$ et $t - \delta \geq 0$, d'où $g(1-t) = 0$ et $g(t-\delta) > 0$ d'ou la bonne définition et
$$\chi(t) = \frac{0}{0 + g(t-\delta)} = 0.$$
- Si $t \leq \delta$ alors $1 - t > 0$ et $t - \delta \leq 0$, d'où $g(1-t) > 0$ et $g(t-\delta) = 0$ d'où la bonne définition et

$$\chi(t) = \frac{g(1-t)}{g(1-t)+0} = 1.$$

- Si $\delta < t < 1$ alors $1-t > 0$ et $t-\delta > 0$, d'où $g(1-t) > 0$ et $g(t-\delta) > 0$ d'où la bonne définition.

De plus par la question **4.26.** on a $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et donc par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, on a $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Ainsi $\boxed{\chi \text{ est un passe-bas lisse}}$.

## 4.II. Passe-bas acceptables

On dit qu'une fonction passe-bas $\chi$ est acceptable ssi
- **continuité en** 0:

$$\chi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1,$$

- **variations bornées**: il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour toute subdivision $(t_0,\dots,t_N)$ de $[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| \leq C.$$

*Rappel: On rappelle qu'une subdivision de* $[0,1]$ *est une liste* $(t_0,\dots,t_N)$ *telle que* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$.

**4.28.** Montrer qu'une fonction passe-bas continue en 0 et décroissante est acceptable.

Soit $\chi$ un passe-bas continu en 0 et décroissante.
Il reste seulement à démontrer que $\chi$ est à variations bornées.
Soit $(t_0,\dots,t_N)$ une subdivision de $[0,1]$.
Comme pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$, $t_k < t_{k+1}$, on a pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k) \leq 0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| = -\sum_{k=0}^{N-1} (\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)) = \chi(t_0) - \chi(t_N) = 1 - 0 = 1.$$

Donc $\boxed{\chi \text{ est un passe-bas acceptable}}$.

**4.29.** Montrer qu'une fonction passe-bas telle que $\chi_{|[0,1]} \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ est acceptable.

Soit $\chi$ un passe-bas tel que $\chi_{|[0,1]} \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
En particulier $\chi$ est continue en 0.
Par le Théorème des Bornes Atteintes pour la fonction continue $\chi'_{|[0,1]}$ sur le segment $[0,1]$ il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad |\chi'(t)| \leq K.$$

Par l'Inégalité des Accroissement Finis, pour tous $x, y \in [0,1]$ tels que $x < y$, on a

$$|\chi(y) - \chi(x)| \leq \sup_{[x,y]}(|\chi'|) \cdot |y-x| \leq K|y-x|.$$

Donc $\chi_{|[0,1]}$ est Lipschitzienne.
Soit $(t_0,\dots,t_N)$ une subdivision de $[0,1]$.
On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| &\leq K \sum_{k=0}^{N-1} |t_{k+1} - t_k| \\ &= K \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) \\ &= K\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\chi \text{ est un passe-bas acceptable}}$.

**4.30.** Montrer que

$$\chi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ \left(1 + t\sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) & \text{si } t \in ]0,1[, \\ 0 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

n'est **pas** un passe-bas acceptable.

On observe que $\chi$ est bien un passe-bas.
Il faut donc montrer qu'elle n'est pas à variations bornées.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons la subdivision

$$0 < \frac{2}{2N+1} < \frac{2}{2N-1} < \cdots < \frac{2}{3} < 1.$$

Pour $m \geq 1$, en posant $s_m = \frac{2}{2m+1}$, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{s_m}\right) = \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^m,$$

donc $\chi(s_m) = 1 + (-1)^m s_m$. Deux valeurs consécutives ont ainsi des écarts de signes opposés et

$$|\chi(s_{m+1}) - \chi(s_m)| = s_{m+1} + s_m \geq \frac{2}{2m+3}.$$

La variation totale associée à cette subdivision est donc minorée par

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{2}{2m+3},$$

qui tend vers $+\infty$ avec $N$ par divergence de la série harmonique.
Il n'existe donc pas de constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{m=1}^{N-1} \frac{2}{2m+3} \leq C.$$

En particulier on en déduit que $\boxed{\chi \text{ n'est pas à variations bornées}}$.

---

## 5. Théorème de $\chi$-Cesàro

*Il n'est conseillé de n'aborder cette partie que si tout le reste du sujet a été traité.*

Dans toute cette partie on fixe $\chi$ une fonction passe-bas acceptable.
On considère de plus une suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

**5.31.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_k \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme pour tout $k \geq n$ on a $\frac{k}{n} \geq 1$, on en déduit que pour tout $k \notin [\![0, n-1]\!]$, $\chi(k/n)u_k = 0$.
Il s'agit donc d'une somme presque nulle et donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_k \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k \text{ converge}}$.

On dit que la série $\displaystyle\sum_k u_k$ est $\underline{\chi\text{-convergente}}$ ssi la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \chi\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Dans ce cas on note $S_\chi(u)$ la limite de cette suite, c'est-à-dire

$$S_\chi(u) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k.$$

On cherche désormais à démontrer le théorème suivant:

**Théorème de $\chi$-Cesàro**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
**Si** la série

$$\sum_k u_k \text{ converge}$$

**alors**

$$\sum_k u_k \text{ est } \chi\text{-convergente.}$$

Et dans ce cas

$$S_\chi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

**5.32.** Commenter le théorème de $\chi$-Cesàro dans les cas $\chi : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$ et $\chi : t \mapsto (1-t)\mathbb{1}_{[0,1[}(t)$.

Les fonctions $t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$ et $t \mapsto (1-t)\mathbb{1}_{[0,1[}(t)$ sont des fonctions passe-bas acceptables car des passes-bas continus et décroissants (cf question **4.28.**).
Par conséquent elles vérifient les hypothèse du théorème de $\chi$-Cesàro.

- Pour $\chi : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1[}\left(\frac{k}{n}\right) u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

  Donc le théorème de $\chi$-Cesàro donne
  «Si $\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$».
  Ce qui est une tautologie.
- Pour $\chi : t \mapsto (1-t)\mathbb{1}_{[0,1[}(t)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-\frac{k}{n})\mathbb{1}_{[0,1[}\left(\frac{k}{n}\right) u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (1-\frac{k}{n}) u_k.$$

  Donc le théorème de $\chi$-Cesàro donne
  «Si $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$».
  Ce qui est exactement le résultat final de la partie 2.

**5.33.** On suppose dans cette question que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\chi\left(\frac{k}{n}\right) - \chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k} u_j\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On s'inspire de la preuve de (Cesàro).
Comme $\chi$ est à variations bornées, il existe $C_{VB} > 0$ tel que pour toute subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ de $[0,1]$, $\sum_{k=0}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| \leq C_{VB}$.
En particulier (somme de termes positifs), pour toute subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ et pour tout $M \in [\![0, N-1]\!]$, on a

$$\sum_{k=M}^{N-1} |\chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| \leq C_{VB}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme (définition de la somme d'une série)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2C_{VB}}.$$

On a alors pour tout $n \geq N_1$, en notant $K_{N_1} = \max_{k\in[\![0,N_1-1]\!]} \left|\sum_{j=0}^{k} u_j\right|$, qui ne dépend que de $N_1$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k}u_j\right)\right| &\leq \sum_{k=0}^{N_1-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\left|\sum_{j=0}^{k}u_j\right| + \sum_{k=N_1}^{n-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\left|\sum_{j=0}^{k}u_j\right| \\ &\leq K_{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| + \sum_{k=N_1}^{n-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\frac{\varepsilon}{2C_{VB}} \\ &\leq K_{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| + C_{VB}\frac{\varepsilon}{2C_{VB}}\end{aligned}.$$

De plus comme $\chi$ est continue en 0, on a pour tout $k \in [\![0, N_1-1]\!]$ fixé,

$$\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il existe donc $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$,

$$\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2K_{N_1}}.$$

Par conséquent pour tout $n \geq N_2$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k}u_j\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on a bien montré que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\chi\left(\frac{k}{n}\right)-\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k}u_j\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

**5.34.** En déduire le théorème de $\chi$-Cesàro.

Supposons que la série $\sum_k u_k$ converge et notons $\ell$ sa somme, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Commençons par traiter le cas $\ell = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par (Abel), on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\chi\left(\frac{k}{n}\right)u_k = \chi\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}u_k - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\chi\left(\frac{k+1}{n}\right)-\chi\left(\frac{k}{n}\right)\right)\sum_{j=0}^{k}u_j$$

c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \left( \chi\left(\frac{k}{n}\right) - \chi\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \sum_{j=0}^{k} u_j \right).$$

Par la question **5.33.** on en déduit que $\sum_k u_k$ est $\chi$-convergent et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{k}{n}\right) u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si $\ell$ est quelconque il suffit de remplacer $u_0$ par $u_0 - \ell$ pour obtenir le même résultat.
On a donc bien montré le théorème de $\chi$-Cesàro.