Théorème de de Bruijn–Erdős

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

- L'objectif de la première partie de ce devoir est d'illustrer un méthode matricielle permettant de résoudre un problème de géométrie combinatoire.
  Plus précisément on cherche à démontrer le théorème de Bruijn-Erdős:

> **Théorème de de Bruijn-Erdős**
> Étant donné un ensemble de $n \geq 3$ points non alignés, l'ensemble des droites passant par au moins deux points contient au moins n éléments.

- La seconde partie propose ensuite deux autres démonstrations (une combinatoire et une géométrique de ce résultat).
- Enfin la dernière partie propose une généralisation.

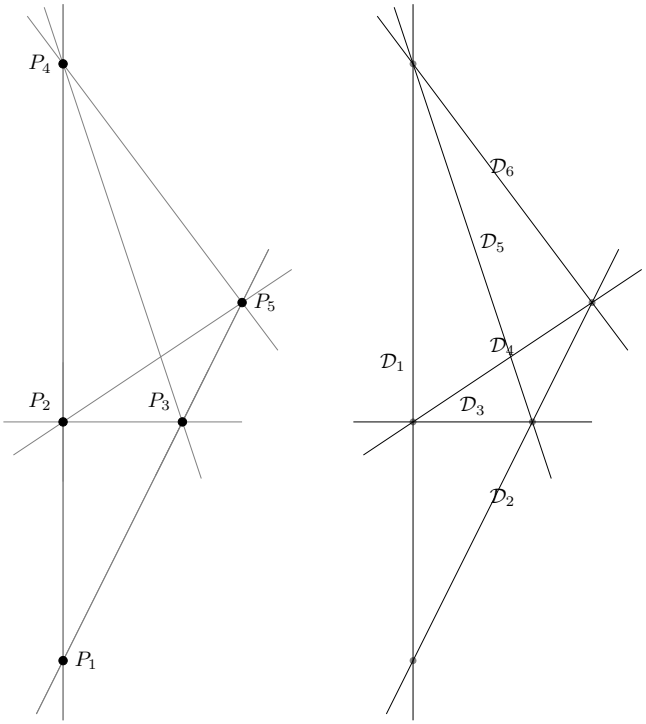
Dans la suite on fixe un entier $n \geq 3$.
On se donne n points distincts $P_1, \dots, P_n$ deux à deux distincts dans le plan, qui ne sont pas tous alignés.
On trace alors toutes les droites reliant au moins deux de ces points, et on les numérote (de manière quelconque) $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$, pour un certain entier $m \geq 1$.
On cherche alors à montrer que $m \geq n$.
Dans la suite on notera

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passe par le point P_i, i.e

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i = \text{card}\left(\{j \in [\![1, m]\!] \mid P_i \in \mathcal{D}_j\}\right)$$

- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$, i.e

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ s_j = \text{card}\left(\{i \in [\![1, n]\!] \mid P_i \in \mathcal{D}_j\}\right)$$



---

1. Démonstration matricielle du théorème de Bruijn-Erdős

1.I. Introduction

1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une configuration où $m = n$.
1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale de m.
1.3. Traduire sur les nombres $r_1, \dots, r_n$ l'hypothèse selon laquelle les points ne sont pas tous alignés.

1.II. Deux lemmes matriciels

Le but de cette partie est de montrer les deux résultats suivants.

> **Lemme A**
> Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T M X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Lemme B
Soit $m \geq 1$ et $(A, B) \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tels que $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors $m \geq n$.

1.4. Démontrer le lemme A.

1.5. On cherche à démontrer le lemme B.

1.5.1. Soit $m \geq 1$ et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On suppose que l'une des colonnes de M est combinaison linéaire des colonnes précédentes, c'est à dire qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_0-1} \in \mathbb{R}$ tels que $C_{j_0} = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j C_j$, où on note pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, C_j la j-ième colonne de M.
Montrer qu'il existe alors $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^m}$.

1.5.2. Soit $1 \leq m < n$ et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice échelonnée réduite.
Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^m}$.

1.5.3. Conclure.

1.III. Conclusion

1.6. Soit $a, r_1, r_2, \ldots, r_n$ des nombres réels tels que $a \geq 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], r_k > a$.

Montrer que $M = \begin{pmatrix} r_1 & & (a) \\ & r_2 & \\ & \ddots & \\ (a) & & r_n \end{pmatrix}$ est inversible.

1.7. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient $(A)_{ij}$ vaut 1 si le point P_i est sur la droite $\mathcal{D}_j$, et 0 sinon. Calculer $A\,A^T$.

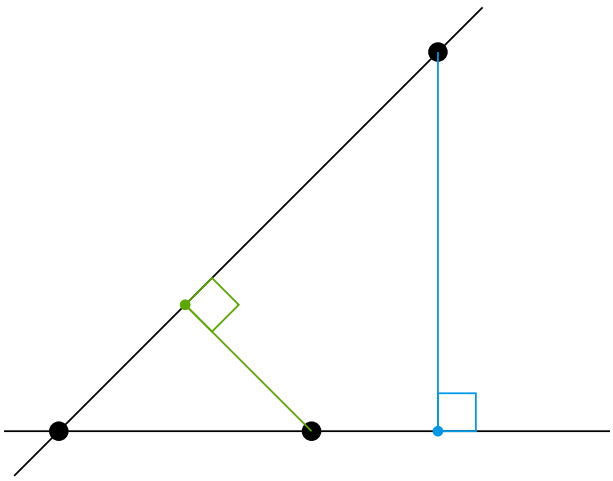
1.8. Conclure.

---

2. Deux autres preuves du théorème de Bruijn-Erdős

On propose désormais **deux preuves alternatives du théorème de de Bruijn-Erdős**.
L'une combinatoire par double comptage, et l'autre par récurrence à l'aide du théorème de Sylvester-Gallai.
Pour plus de détails sur les différentes preuves de ce théorème on renvoie vers [1].
On conserve les notations de la partie précédente. En particulier

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passant par le point P_i.
- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$.



2.I. Preuve combinatoire par double comptage

2.9. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ tels que $P_i \notin \mathcal{D}_j$.
Expliquer pourquoi $r_i \geq s_j$.

2.10. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} = 1.$$

2.11. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n - s_j)} = 1.$$

2.12. Conclure.

2.II. Preuve géométrique par Sylvester-Gallai

On rappelle qu'étant donné un point P et une droite $\mathcal{D}$ la distance de P à $\mathcal{D}$, noté $d(P,\mathcal{D})$ est égal à la distance entre P et le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

2.13. Montrer qu'il existe un couple (i_0, j_0) tel que

$$d(P_{i_0}, \mathcal{D}_{j_0}) = \min\left(\{d(P_i, \mathcal{D}_j), (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,k]\!] \text{ t.q } P_i \notin \mathcal{D}_j\}\right)$$

2.14. On note H le projeté orthogonal de P_{i_0} sur $\mathcal{D}_{j_0}$.
À l'aide d'un **schéma** montrer que pour tous points P_{i_1}, P_{i_2} de $\mathcal{D}_{j_0}$, P_{i_1} et P_{i_2} ne sont pas du "même coté de H sur $\mathcal{D}_j$" (c'est à dire que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{HP_{i_1}}, \overrightarrow{HP_{i_2}}\right) \not\equiv 0[2\pi]$).

2.15. Conclure que $s_{j_0} = 2$.

2.16. Démontrer par récurrence sur n le théorème de Bruijn-Erdős.

---

3. Bonus: une généralisation

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}$ et $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^*$.

3.17. Calculer

$$\det\left(\begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & r_n \end{pmatrix}\right).$$

On suppose désormais $a \geq 1$. On considère Ω un ensemble de cardinal m et on suppose qu'il existe $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω deux à deux distinctes telles que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ si $i \neq j$ alors $\text{card}(D_i \cap D_j) = a$.

3.18. Montrer que $m \geq n$.

References

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Raisonnements divins: quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, 2006.