En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

- L'objectif de la première partie de ce devoir est d'illustrer un méthode matricielle permettant de résoudre un problème de géométrie combinatoire.
  Plus précisément on cherche à démontrer le théorème de Bruijn-Erdős:

> **Théorème de de Bruijn-Erdős**
> Étant donné un ensemble de $n \geq 3$ points non alignés, l'ensemble des droites passant par au moins deux points contient au moins n éléments.

- La seconde partie propose ensuite deux autres démonstrations (une combinatoire et une géométrique de ce résultat).
- Enfin la dernière partie propose une généralisation.

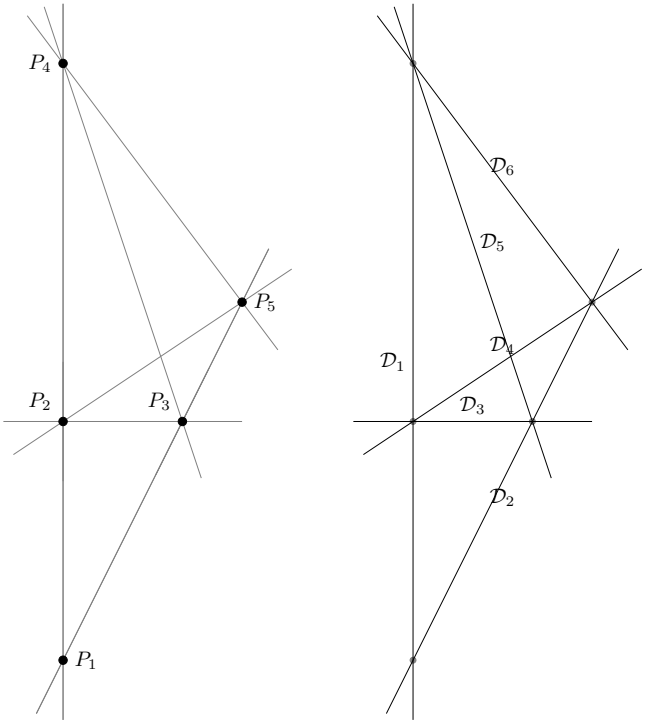
Dans la suite on fixe un entier $n \geq 3$.
On se donne n points distincts $P_1, \dots, P_n$ deux à deux distincts dans le plan, qui ne sont pas tous alignés.
On trace alors toutes les droites reliant au moins deux de ces points, et on les numérote (de manière quelconque) $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$, pour un certain entier $m \geq 1$.
On cherche alors à montrer que $m \geq n$.
Dans la suite on notera

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passe par le point P_i, i.e

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i = \text{card}\left(\{j \in [\![1, m]\!] \mid P_i \in \mathcal{D}_j\}\right)$$

- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$, i.e

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ s_j = \text{card}\left(\{i \in [\![1, n]\!] \mid P_i \in \mathcal{D}_j\}\right)$$



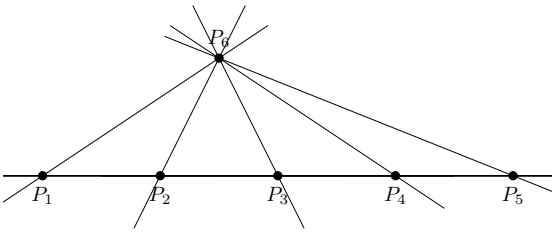
---

1. Démonstration matricielle du théorème de Bruijn-Erdős

1.I. Introduction

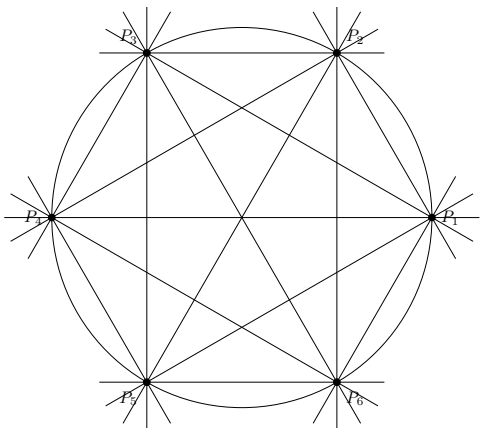
1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une configuration où $m = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Il suffit de prendre $n-1$ points $P_1, \dots, P_{n-1}$ sur une même droite $\mathcal{D}_n$ et un point en dehors de la droite formée par les autres.
Il y a ainsi exactement n droites: $\mathcal{D}_n$ et, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathcal{D}_i = (P_i\ P_n)$.



1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale de m.

- Toute droite $\mathcal{D}_j$ (pour $j \in [\![1,m]\!]$) est de la forme $\mathcal{D}_j = (P_{i_0}\ P_{i_1})$, pour un certain choix d'indices $i_0 < i_1$ dans $[\![1,n]\!]$.
  Ainsi, il y a moins de droites que de paires $\{i_0, i_1\}$ d'entiers différents.
  Ainsi, $m \leq \binom{n}{2}$.
- On peut effectivement avoir $m = \binom{n}{2}$ en prenant des points tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. C'est par exemple le cas si les points sont tous sur un même cercle.
- Le valeur maximale de m est donc $\boxed{\binom{n}{2}}$.



1.3. Traduire sur les nombres $r_1, \ldots, r_n$ l'hypothèse selon laquelle les points ne sont pas tous alignés.

Dire que les points ne sont pas tous alignés signifie que par chaque point, passent plusieurs droites, c'est-à-dire que $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], r_i \geq 2}$.

1.II. Deux lemmes matriciels

Le but de cette partie est de montrer les deux résultats suivants.

Lemme A
Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T M X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Lemme B
Soit $m \geq 1$ et $(A, B) \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tels que $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors $m \geq n$.

1.4. Démontrer le lemme A.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(M)$. On a donc $MX = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $X^T M X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par hypothèse, $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On a ainsi montré $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On a donc bien montré le $\boxed{\text{lemme A}}$.

1.5. On cherche à démontrer le lemme B.

1.5.1. Soit $m \geq 1$ et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On suppose que l'une des colonnes de M est combinaison linéaire des colonnes précédentes, c'est à dire qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_0-1} \in \mathbb{R}$ tels que $C_{j_0} = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j C_j$, où on note pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, C_j la j-ième colonne de M.
Montrer qu'il existe alors $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_0-1} \in \mathbb{R}$ tels que $C_{j_0} = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j C_j$.
On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$M e_{j_0} = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j M e_j \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad M\left(e_{j_0} - \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j e_j\right) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

et le vecteur $X = e_{j_0} - \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j e_j$ est bien $\boxed{\text{un élément non nul}}$ (sa j_0-ième coordonnée vaut 1) $\boxed{\text{du noyau de } M}$.

1.5.2. Soit $1 \leq m < n$ et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice échelonnée réduite.
Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^m}$.

La matrice M a au plus $m < n$ pivots, donc il existe une colonne sans pivot.
Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$ le plus petit indice de colonne tel que $C_{j_0}(M)$ n'ait pas de pivot.
En particulier, $C_1(M), \dots, C_{j_0-1}(M)$ ont un pivot, donc $C_1(M) = f_1, \dots, C_{j_0-1}(M) = f_{j_0-1}$, où l'on a noté $f_1, \dots, f_m$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.
Comme $C_{j_0}(M)$ n'a pas de pivot, elle est nécessairement de la forme

$$C_{j_0}(M) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{j_0-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j f_j = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j C_j(M).$$

Autrement dit, $C_{j_0}(M)$ est combinaison linéaire des colonnes précédentes, et la question précédente $\boxed{\text{conclut}}$.

1.5.3. Conclure.

Supposons par l'absurde $m < n$.
On peut trouver une suite d'opérations élémentaires transformant B en une matrice échelonnée réduite. En faisant le produit des matrices d'opérations élémentaires correspondantes, on trouve $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ tel que $PB \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ soit échelonnée réduite.
D'après la question précédente, on peut trouver $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $(PB)X = 0_{\mathbb{R}^m}$.
En multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient $BX = 0_{\mathbb{R}^m}$, puis $(AB)X = 0_{\mathbb{R}^n}$ en multipliant à gauche par $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Comme $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on en déduit $X = (AB)^{-1}(AB)X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Cela fournit une contradiction, donc on avait bien $\boxed{m \geq n}$.

1.III. Conclusion

1.6. Soit $a, r_1, r_2, \dots, r_n$ des nombres réels tels que $a \geq 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], r_k > a$.

Montrer que $M = \begin{pmatrix} r_1 & & (a) \\ & r_2 & \\ & \ddots & \\ (a) & & r_n \end{pmatrix}$ est inversible.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X^T M X = 0$.
La matrice $X^T M X$ est de taille 1×1, et son unique élément est

$$\begin{aligned}(X^T M X)_{1,1} &= \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} (X^T)_{1,k} [M]_{k,\ell} (X)_{\ell,1} \\ &= \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} [M]_{k,\ell}\, x_k\, x_\ell.\end{aligned}$$

En notant $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constitué que de 1 i.e $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$M = a\, J + \mathrm{Diag}(r_1 - a, \dots, r_n - a)$$

, ce qui permet de continuer le calcul :

$$\begin{aligned}(X^T M X) = (X^T M X)_{1,1} &= \sum_{1\leq k,\ell\leq n} (M)_{k,\ell}\, x_k\, x_\ell \\ &= \sum_{1\leq k,\ell\leq n} a\, x_k\, x_\ell + \sum_{i=1}^{n}(r_i - a)x_i^2 \\ &= a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}(r_i - a)x_i^2.\end{aligned}$$

En particulier, comme $a \geq 0$, on a

$$X^T M X \geq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(r_i - a)}_{>0} x_i^2.$$

Puisque cette somme est nulle et que ses termes sont positifs, chacun d'entre eux doit être nul, ce qui donne $x_1 = \cdots = x_n = 0$, c'est-à-dire $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Le lemme A montre alors que la matrice $\boxed{M \text{ est inversible}}$.

1.7. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient $(A)_{ij}$ vaut 1 si le point P_i est sur la droite $\mathcal{D}_j$, et 0 sinon. Calculer $A\,A^T$.

Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}(A\,A^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} (A)_{i,k}\,(A^T)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} (A)_{i,k}\,(A)_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{(P_i\in\mathcal{D}_k)}\,\delta_{(P_j\in\mathcal{D}_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{(P_i\in\mathcal{D}_k \text{ et } P_j\in\mathcal{D}_k)}.\end{aligned}$$

Autrement dit, $(A\,A^T)_{ij}$ est le nombre de droites $\mathcal{D}_k$ passant à la fois par P_i et P_j.
- Si $i \neq j$, il y a une unique telle droite, à savoir la droite $(P_i\ P_j)$.
- Si $i = j$, on compte les droites passant par P_i, et la réponse est le nombre entier r_i, par définition de celui-ci.

On conclut qu'avec les notations de la question **1.3.**, $\boxed{A\,A^T = \begin{pmatrix} r_1 & & (1) \\ & r_2 & \\ & & \ddots \\ (1) & & r_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).}$

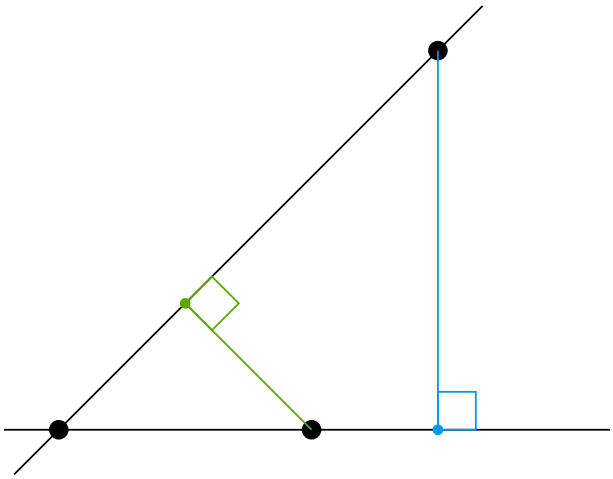
1.8. Conclure.

La question **1.3.** permet de montrer que la matrice obtenue à la question **1.7.** vérifie bien les hypothèses de la question **1.6.** et donc (avec les notations de **1.7.**) $A\,A^T$ est inversible.
D'après le lemme B, on en déduit $m \geq n$, et donc le $\boxed{\text{théorème de De Bruijn-Erdős}}$.

2. Deux autres preuves du théorème de Bruijn-Erdős

On propose désormais **deux preuves alternatives du théorème de de Bruijn-Erdős**.
L'une combinatoire par double comptage, et l'autre par récurrence à l'aide du théorème de Sylvester-Gallai.
Pour plus de détails sur les différentes preuves de ce théorème on renvoie vers [1].
On conserve les notations de la partie précédente. En particulier

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note r_i le nombre d'entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que la droite $\mathcal{D}_j$ passant par le point P_i.
- Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on note s_j le nombre d'entiers $i \in [\![1, n]\!]$ tels que le point P_i appartient à la droite $\mathcal{D}_j$.

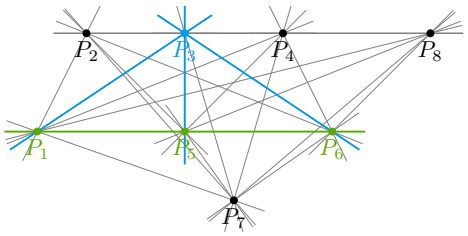


2.I. Preuve combinatoire par double comptage

2.9. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ tels que $P_i \notin \mathcal{D}_j$.
Expliquer pourquoi $r_i \geq s_j$.

À chaque point P_{i_0} de $\mathcal{D}_j$ on peut associer la droite $(P_iP_{i_0})$ qui passe par P_i (car $P_i \neq P_{i_0}$).
De plus ces droites sont deux à deux distinctes.
En effet si par l'absurde les droites $(P_iP_{i_1})$ et $(P_iP_{i_2})$ sont confondues avec P_{i_1} et P_{i_2} deux points distincts de $\mathcal{D}_j$ alors P_i, P_{i_1}, P_{i_2} sont alignés, et donc $P_i \in (P_{i_1}P_{i_2}) = \mathcal{D}_j$. Ce qui est absurde.
On a donc exhibé s_j droites passant par P_i, d'où

$$\boxed{r_i \geq s_j}.$$



2.10. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} = 1.$$

Remarquons tout d'abord que comme tous les points ne sont pas alignés, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i < m$ et donc la somme est bien définie.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
On a, comme il y a $m - r_i$ entiers $j \in [\![1, m]\!]$ tels que $\mathcal{D}_j$ ne passe pas P_i,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} &= \frac{1}{n(m - r_i)} \sum_{j=1}^{m} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \\ &= \frac{1}{n(m - r_i)}(m - r_i) \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

c'est à dire,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m - r_i)} = 1}.$$

2.11. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n - s_j)} = 1.$$

Remarquons tout d'abord que comme tous les points ne sont pas alignés, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $s_j < n$ et donc la somme est bien définie.
Soit $j \in [\![1,m]\!]$.
On a, comme il y a $n - s_j$ entiers $i \in [\![1,n]\!]$ tels que P_i n'appartient pas à $\mathcal{D}_j$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} &= \frac{1}{m(n-s_j)} \sum_{i=1}^{n} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \\ &= \frac{1}{m(n-s_j)}(n-s_j) \\ &= \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m}.$$

c'est à dire,

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = 1}.$$

2.12. Conclure.

Par les questions **2.10.** et **2.11.** on a en particulier

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{m(n-s_j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j}}{n(m-r_i)}$$

et donc, par sommes doubles,

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \delta_{P_i \notin \mathcal{D}_j} \left(\frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \right) = 0$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!] \\ P_i \notin \mathcal{D}_j}} \left(\frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \right) = 0.$$

Or comme les points ne sont pas tous alignés,

$$\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \mid P_i \notin \mathcal{D}_j\} \neq \emptyset.$$

Or une somme (non-vide) d'éléments strictements négatifs est strictement négative, d'où par contraposée,

$$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!],\ P_i \notin \mathcal{D}_j \text{ et } \frac{1}{m(n-s_j)} - \frac{1}{n(m-r_i)} \geq 0.$$

Fixons un tel couple (i,j).
Alors

$$\frac{1}{m(n-s_j)} \geq \frac{1}{n(m-r_i)}$$

et comme les deux termes sont positifs (car $s_j < n$ et $r_i < m$) on en déduit que

$$m(n-s_j) \leq n(m-r_i)$$

c'est à dire

$$mn - ms_j \leq nm - nr_i$$

ou encore

$$ms_j \geq nr_i.$$

Or comme $P_i \notin \mathcal{D}_j$, par la question **2.9.**,

$$s_j \leq r_i$$

on en déduit (tous les termes sont positifs)

$$\boxed{m \geq n}.$$

2.II. Preuve géométrique par Sylvester-Gallai

On rappelle qu'étant donné un point P et une droite $\mathcal{D}$ la distance de P à $\mathcal{D}$, noté $d(P,\mathcal{D})$ est égal à la distance entre P et le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

2.13. Montrer qu'il existe un couple (i_0,j_0) tel que

$$d(P_{i_0},\mathcal{D}_{j_0}) = \min\left(\{d(P_i,\mathcal{D}_j),(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,k]\!] \text{ t.q } P_i\notin\mathcal{D}_j\}\right)$$

Comme les points ne sont pas tous alignés l'ensemble $\{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!] \mid P_i\notin\mathcal{D}_j\}$ est non vide et fini.
Comme tout ensemble fini et non vide de réels admet un minimum, il existe un tel couple (i_0,j_0).

2.14. On note H le projeté orthogonal de P_{i_0} sur $\mathcal{D}_{j_0}$.
À l'aide d'un **schéma** montrer que pour tous points P_{i_1},P_{i_2} de $\mathcal{D}_{j_0}$, P_{i_1} et P_{i_2} ne sont pas du "même coté de H sur $\mathcal{D}_j$" (c'est à dire que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{HP_{i_1}},\overrightarrow{HP_{i_2}}\right)\not\equiv 0[2\pi]$).

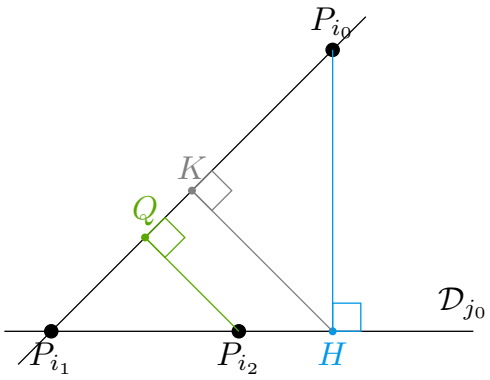
Si par l'absurde P_{i_1} et P_{i_2} sont du même coté de H, alors, quitte à les réordonner, et quitte à effectuer un retournement, on peut supposer que les points sont dans l'ordre: P_{i_1} puis P_{i_2}, puis H.
Notons Q le projeté orthogonal de P_{i_1} sur la droite $(P_{i_2}P_{i_0})$.
Alors en introduisant K la projection orthogonale de P_{i_2} sur $(P_{i_1}P_{i_0})$ on a (car dans un triangle rectangle le plus grand coté est l'hypothènuse, et par Thalès)

$$P_{i_2}Q < P_{i_0}H$$

d'où

$$0 < d(P_{i_2},(P_{i_1}P_{i_0})) < d(P_{i_0},(P_{i_1}P_{i_2})).$$

Ce qui est absurde par minimalité du couple $(P_{i_0},\mathcal{D}_{i_0})$.



2.15. Conclure que $s_{j_0}=2$.

On a par définition $s_{j_0}\geq 2$.
De plus si par l'absurde $s_{j_0}\geq 3$ alors $\mathcal{D}_{j_0}$ contient au moins trois points.
Mais alors au moins deux points sont "du même coté de H" (car il n'y a que deux cotés), ce qui contredit la question **2.14.**.
Par conséquent

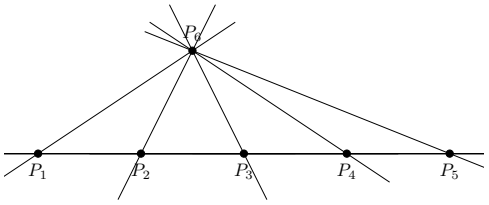
$$\boxed{s_{j_0}=2}.$$

Remarque: on a démontré ici le théorème dit de «Sylvester-Gallai»:
On considère nombre fini de points du plan non tous alignés.
Il existe une droite passant par **exactement deux points**.

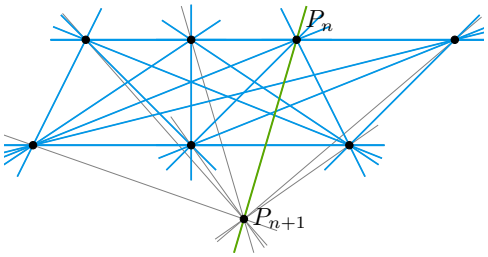
2.16. Démontrer par récurrence sur n le théorème de Bruijn-Erdős.

- **Initialisation**
  Pour $n=3$, si trois points ne sont pas alignés, alors ils forment un triangle non dégénéré et donc $m=3$. Et $3\geq 3$.
- **Hérédité**
  Soit $n\geq 3$, et supposons la propriété vraie au rang n.
  Considèrons $n+1$ points du plan non tous alignés $(P_1,\dots,P_{n+1})$.
  Par la question **2.15.** il en existe deux tels que la droite passant par ces deux points ne passe par aucun autre point.
  Quitte à renuméroter on peut supposer qu'il s'agit de (P_nP_{n+1}).
  On procède alors par disjonction de cas.

  - Si $(P_1,\dots,P_n)$ sont alignés alors on est dans la situation du schéma à droite et donc $m=n+1$ (la droite portant $P_1,\dots,P_n$, plus les n droites $(P_i\ P_{n+1})$, toutes distinctes).



Si $(P_1,\dots,P_n)$ ne sont pas alignés, alors par hypothèse de récurrence il y a au moins n droites entre ces points.
- De plus aucune de ces droites n'est égale à la droite (P_nP_{n+1}) (par construction).
  D'où il y a au moins $n+1$ droites entre $(P_1,\dots,P_n,P_{n+1})$.



Dans tous les cas $m \geq n+1$.

► **Conclusion**
La propriété étant initialisée et héréditaire on a donc, pour tout $n \geq 3$, pour tout ensemble de n points du plan non tous alignés, il existe au moins n droites passant par ces points.

On a donc bien démontré le théorème de Bruijn-Erdős.

---

3. Bonus: une généralisation

Soient $n,m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}$ et $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{N}^*$.

3.17. Calculer

$$\det\left(\begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & r_n \end{pmatrix}\right).$$

Soit $D = \begin{pmatrix} r_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_n-a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche alors à calculer $\det(D+aJ)$.

- **Si $a \notin \{r_1,\dots,r_n\}$.**
  Alors D est inversible d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1-a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2-a} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{r_n-a} \end{pmatrix}$.
  Donc $\det(D+aJ) = \det(D)\det(I+aD^{-1}J) = \det(D)\det(I+aD^{-1}J)$.
  Or $aD^{-1}J = \begin{pmatrix} \frac{a}{r_1-a} & \frac{a}{r_1-a} & \cdots & \frac{a}{r_1-a} \\ \frac{a}{r_2-a} & \frac{a}{r_2-a} & \cdots & \frac{a}{r_2-a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a}{r_n-a} & \frac{a}{r_n-a} & \cdots & \frac{a}{r_n-a} \end{pmatrix}$ est de rang 1.
  Donc (cf TD ou exercice 3), $\det(I+aD^{-1}J) = 1+\mathrm{tr}(aD^{-1}J) = 1+a\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i-a}$.
  Par conséquent

$$\begin{aligned}\det(D+aJ) &= \det(D)\left(1+a\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i-a}\right) \\ &= \prod_{j=1}^n (r_j-a)\left(1+a\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i-a}\right). \\ &= \prod_{j=1}^n (r_j-a) + a\sum_{i=1}^n \prod_{j\neq i}^n (r_j-a)\end{aligned}$$

- **Cas général.**
  On a $a \mapsto \det(D+aJ)$ est polynomiale (en a) car le déterminant polynomial en les coefficients, et $a \mapsto \prod_{j=1}^n (r_j-a) + a\sum_{i=1}^n \prod_{j\neq i}^n (r_j-a)$ polynomiale.
  Or ces deux fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{r_1,\dots,r_n\}$ qui est infini et (rigidité) sont donc égales.

D'où

$$\boxed{\det(D+aJ)=\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)}.$$

On suppose désormais $a\geq 1$. On considère Ω un ensemble de cardinal m et on suppose qu'il existe $D_1,\dots,D_n\in\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω deux à deux distinctes telles que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ si $i\neq j$ alors $\mathrm{card}(D_i\cap D_j)=a$.

3.18. Montrer que $m\geq n$.

- **Interprétation combinatoire de la matrice**
  Notons pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $r_i=\mathrm{card}(D_i)$.
  Alors pour tous i,j distincts, comme $D_i\cap D_j\subseteq D_i$, on a $r_i=\mathrm{card}(D_i)\geq\mathrm{card}(D_i\cap D_j)=a$.
  De plus, au plus un indice i vérifie $r_i=a$. En effet, si $r_i=a$ alors pour tout $j\neq i$, $\mathrm{card}(D_i\cap D_j)=a=\mathrm{card}(D_i)$ donc $D_i\subseteq D_j$; si deux indices distincts i,j vérifiaient $r_i=r_j=a$, on aurait $D_i\subseteq D_j$ et $D_j\subseteq D_i$, donc $D_i=D_j$, ce qui est exclu.
  Soit $A\in\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j}=\delta_{j\in D_i}$.
  Soit $M=AA^T\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
  Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned}(M)_{ij}&=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}A_{jk}\\&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{k\in D_i}\delta_{k\in D_j}\\&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{k\in D_i\cap D_j}\\&=\mathrm{card}(D_i\cap D_j)\\&=\begin{cases}a & \text{si } i\neq j\\ r_i & \text{si } i=j\end{cases}.\end{aligned}$$

  Par le calcul de déterminant précédent on a

$$\det(M)=\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a).$$

  Tous les facteurs r_j-a sont positifs ou nuls, et au plus un d'entre eux est nul.
  ▷ Si $r_j>a$ pour tout j, alors $\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)>0$ et la somme est positive ou nulle, donc $\det(M)>0$.
  ▷ Si $r_{i_0}=a$ pour un (unique) indice i_0, alors $\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)=0$ et, dans la somme, tous les termes d'indice $i\neq i_0$ contiennent le facteur $r_{i_0}-a=0$; il reste donc $\det(M)=a\prod_{j\neq i_0}^{n}(r_j-a)>0$ car $a\geq 1$.
  Dans tous les cas $\det(M)>0$.
  Par conséquent M est inversible i.e $\mathrm{rg}(M)=n$.
  Or

$$\mathrm{rg}(M)\leq\mathrm{rg}(A)\leq m.$$

  Donc

$$\boxed{n\leq m}.$$

References

[1] Martin Aigner and Günter M Ziegler. *Raisonnements divins: quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, 2006.