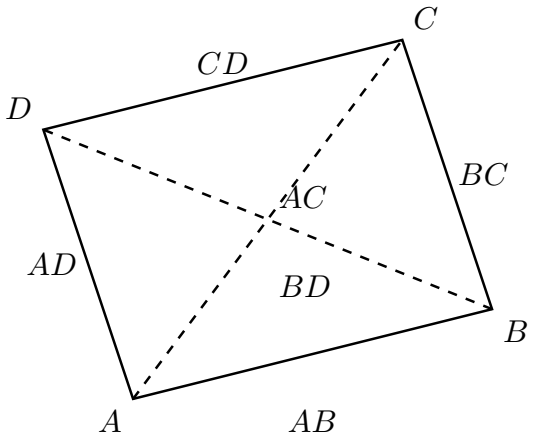
Birapport et théorème de Ptolémée

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce devoir propose d'étudier la notion très utile en géométrie de **birapport** et notamment son lien avec la cocyclicité.
Comme application on propose de démontrer le cas d'égalité de l'inégalité de Ptolémée, concernant les longueurs des cotés d'un quadrilatère.



1 Birapport et application au théorème de Ptolémée

Pour a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts on définit leur birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{\left(\frac{d-a}{d-b}\right)}{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

Étant donnés A, B, C, D quatre points du plan deux à deux distincts on dit qu'il sont **cocycliques** ssi il existe un cercle contenant ces quatre points.

1.1. Soient A, B, C, D quatre points du plan deux à deux distincts.
Montrer qu'ils sont cocycliques ou alignés ssi

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [\pi].$$

Dans la suite on fixe A, B, C,D quatre points du plan deux à deux distincts et on note a, b,c, d leurs affixes respectives.

1.2. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

1.3. (*Inégalité de Ptolémée*)
Montrer que

$$AC \times BD \leq AB \times CD + BC \times AD.$$

1.4. (*Théorème de Ptolémée*)
Montrer que

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

ssi A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, dans l'ordre A, B, C, D.