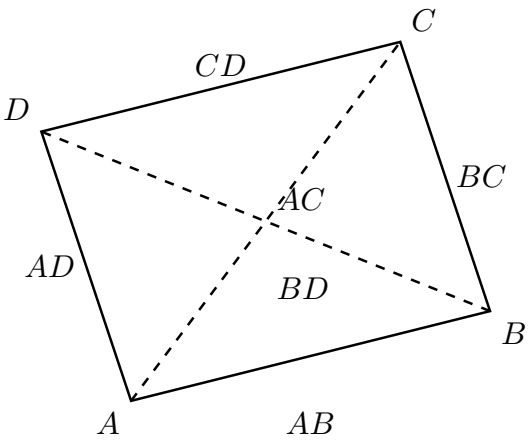
**En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.**

## Contexte

Ce devoir propose d'étudier la notion très utile en géométrie de **birapport** et notamment son lien avec la cocyclicité.
Comme application on propose de démontrer le cas d'égalité de l'inégalité de Ptolémée, concernant les longueurs des cotés d'un quadrilatère.




## 1 Birapport et application au théorème de Ptolémée

Pour $a, b, c, d$ quatre nombres complexes deux à deux distincts on définit leur birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{\left(\frac{d-a}{d-b}\right)}{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

Étant donnés $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points du plan deux à deux distincts on dit qu'il sont **cocycliques** ssi il existe un cercle contenant ces quatre points.

**1.1.** Soient $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points du plan deux à deux distincts.
Montrer qu'ils sont cocycliques ou alignés ssi

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [\pi].$$

Il y a plusieurs façons de procéder.
Si $A$, $B$ et $C$ sont alignés alors on a bien $A$, $B$, $C$, $D$ alignés ssi $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [\pi]$.
Supposons désormais $A$, $B$ et $C$ non alignés.
Fixons un repère tel que l'affixe de $A$ soit 0 et celle de $B$ soit 1.
L'ensemble des points $M$ (distincts de $A$ et $B$) tels que $\widehat{ACB} \equiv \theta\ [\pi]$ est l'ensemble des points d'affixe $z$ vérifiant

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \frac{z-1}{z-0} = \lambda \frac{c-1}{c-0}.$$

Le cas $\lambda > 0$ correspondant au cas $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [2\pi]$ et le cas $\lambda < 0$ correspondant au cas $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} + \pi\ [2\pi]$.
Avec $\theta$ ($\theta \neq 0\ [\pi]$) un argument de $\frac{c-1}{c-0}$, c'est donc l'ensemble des points d'affixe $z \neq 0, 1$ vérifiant

$$(1 - \frac{1}{z})e^{-i\theta} \in \mathbb{R}^*$$

c'est à dire l'ensemble des points d'affixe $z \neq 0, 1$ vérifiant

$$e^{-i\theta} - e^{-i\theta}\frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{i\theta}\frac{1}{\bar{z}}$$

ce qui peut se réécrire (en multipliant par $z\bar{z}$) comme l'ensemble des points d'affixe $z \neq 0, 1$ vérifiant

$$(e^{-i\theta} - e^{i\theta})|z|^2 - (e^{-i\theta}\bar{z} - e^{i\theta}z) = 0$$

et donc (comme $(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -2i\sin(\theta) \neq 0$ par non alignement) l'ensemble des points $z \neq 0, 1$ vérifiant

$$\left| z - \frac{ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)} \right|^2 = \frac{1}{4\sin(\theta)^2}$$

ce qui est bien un cercle de centre $\frac{ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}$ et de rayon $\frac{1}{2\sin(\theta)}$.

Et donc on a bien $\boxed{D \text{ cocyclique avec } A,\ B,\ C \text{ ssi } \widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [\pi]}$.

Dans la suite on fixe $A$, $B$, $C$,$D$ quatre points du plan deux à deux distincts et on note $a$, $b$,$c$, $d$ leurs affixes respectives.

**1.2.** Montrer que $A$, $B$, $C$, $D$ sont cocycliques ou alignés ssi $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

Par la question **1.1.** on a $A$, $B$, $C$, $D$ cocycliques ou alignés ssi $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [\pi]$, c'est à dire ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\frac{d-a}{d-b} = \lambda \frac{c-a}{c-b}$$

le cas $\lambda > 0$ correspondant à $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}\ [2\pi]$ et le cas $\lambda < 0$ correspondant à $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} + \pi\ [2\pi]$.
Par conséquent on a bien

$$\boxed{A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés } \Leftrightarrow\ [a, b, c, d] \in \mathbb{R}}.$$

**1.3.** (*Inégalité de Ptolémée*)
Montrer que

$$AC \times BD \leq AB \times CD + BC \times AD.$$

On a

$$\begin{aligned}(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a) &= bd - ad - bc + ac + cd - bd - ac + ab \\ &= cd - ad - bc + ab \qquad\qquad = (c-a)(d-b)\end{aligned}$$

et donc par inégalité triangulaire

$$|c-a||d-b| = |(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a)| \leq |b-a||d-c| + |c-b||d-a|$$

c'est à dire

$$\boxed{AC \times BD \leq AB \times CD + BC \times AD}.$$

**1.4.** (*Théorème de Ptolémée*)
Montrer que

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

ssi $A$, $B$, $C$, $D$ sont cocycliques ou alignés, dans l'ordre $A$, $B$, $C$, $D$.

Dans la question **1.3.**, la seule inégalité étant l'inégalité triangulaire, le reste étant des égalités.
On a donc

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$$

ssi

$$|(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a)| = |b-a||d-c| + |c-b||d-a|$$

ssi (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour des complexes non nuls )

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, (b-a)(d-c) = \lambda (c-b)(d-a)$$

ou encore $((c-b)(d-a) \neq 0)$ ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{(b-a)(d-c)}{(c-b)(d-a)} = \lambda.$$

Or en divisant l'identité $(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a) = (c-a)(d-b)$ de la question **1.3.** par $(c-b)(d-a)$ on obtient

$$\frac{(b-a)(d-c)}{(c-b)(d-a)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} - 1 = \frac{1}{[a, b, c, d]} - 1.$$

En notant $\chi = [a, b, c, d]$, la condition précédente se réécrit donc $\frac{1}{\chi} - 1 \in \mathbb{R}_+^*$, c'est à dire $\chi \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{\chi} > 1$, ou encore ssi

$$[a, b, c, d] \in ]0, 1[\,.$$

Ce qui d'après la question **1.2.** (dans le cas $]0, 1[$, qui parmi les cas réels code de plus la position relative des points :

les paires $\{A, C\}$ et $\{B, D\}$ se séparent sur le cercle ou la droite) est équivalent à $\boxed{A,\ B,\ C,\ D \text{ cocycliques ou alignés}}$ dans l'ordre $A$, $B$, $C$, $D$.