Une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif de ce DM facultatif est de s'entraîner à rechercher en autonomie des exercices proches des méthodes du cours mais nécessitant un peu plus de technicité, et par la même occasion montrer de démontrer des résultats mathématiquement "intéressants".
Plus précisément, ce sujet propose de travailler les **récurrences** pour montrer de manière explicite que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$ sont en bijection, c'est à dire qu'il y a **autant de rationnels que d'entiers**.

---

1 Récurrences et dénombrabilité des rationnels

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{2m} = a_m \\ b_{2m} = a_m + b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2m+1} = a_m + b_m \\ b_{2m+1} = b_m. \end{cases}$$

En admettant que ces suites sont bien définies (à méditer), on cherche à montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{Q}_+ \\ n &\mapsto \frac{a_n}{b_n} \end{aligned}$$

est **bijective** c'est à dire que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$ il existe un et unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $r = \frac{a_n}{b_n}$.

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	0	1	21	8	5
1	1	1	22	5	7
2	1	2	23	7	2
3	2	1	24	2	7
4	1	3	25	7	5
5	3	2	26	5	8
6	2	3	27	8	3
7	3	1	28	3	7
8	1	4	29	7	4
9	4	3	30	4	5
10	3	5	31	5	1
11	5	2	32	1	6
12	2	5	33	6	5
13	5	3	34	5	9
14	3	4	35	9	4
15	4	1	36	4	11
16	1	5	37	11	7
17	5	4	38	7	10
18	4	7	39	10	3
19	7	3	40	3	11
20	3	8	41	11	8

1.1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

1.2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que p et q sont premiers entre eux. Montrer que

- **Si** $p \geq q$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p-q}{q}$ **alors** il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.
- **Si** $p < q$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p}{q-p}$ **alors** il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.

1.3. En déduire par une récurrence bien choisie que

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ r = \frac{a_n}{b_n}.$$

1.4. Montrer par récurrence que

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n_1}}{b_{n_1}} = \frac{a_{n_2}}{b_{n_2}} \Rightarrow n_1 = n_2.$$

1.5. Écrire une fonction python `bijection_explicite(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant le tuple (a_n, b_n).
Par exemple `bijection_explicite(48)` renvoie (a_{48}, b_{48}) c'est à dire `(2,9)`.
