En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

L'objectif de ce DM facultatif est de s'entraîner à rechercher en autonomie des exercices proches des méthodes du cours mais nécessitant un peu plus de technicité, et par la même occasion montrer de démontrer des résultats mathématiquement "intéressants".
Plus précisément, ce sujet propose de travailler les **récurrences** pour montrer de manière explicite que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$ sont en bijection, c'est à dire qu'il y a **autant de rationnels que d'entiers**.

---

1 Récurrences et dénombrabilité des rationnels

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{2m} = a_m \\ b_{2m} = a_m + b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2m+1} = a_m + b_m \\ b_{2m+1} = b_m. \end{cases}$$

En admettant que ces suites sont bien définies (à méditer), on cherche à montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{Q}_+ \\ n &\mapsto \frac{a_n}{b_n} \end{aligned}$$

est **bijective** c'est à dire que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$ il existe un et unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $r = \frac{a_n}{b_n}$.

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	0	1	21	8	5
1	1	1	22	5	7
2	1	2	23	7	2
3	2	1	24	2	7
4	1	3	25	7	5
5	3	2	26	5	8
6	2	3	27	8	3
7	3	1	28	3	7
8	1	4	29	7	4
9	4	3	30	4	5
10	3	5	31	5	1
11	5	2	32	1	6
12	2	5	33	6	5
13	5	3	34	5	9
14	3	4	35	9	4
15	4	1	36	4	11
16	1	5	37	11	7
17	5	4	38	7	10
18	4	7	39	10	3
19	7	3	40	3	11
20	3	8	41	11	8

1.1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{H}_n$ la propriété «$a_n \wedge b_n = 1$» et montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$.

- **Initialisation**
  On a $0 \wedge 1 = 1$ d'où $\mathcal{H}_0$.
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathcal{H}_k$.
  On procède par disjonction de cas.
  - Dans le cas où n est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$. En particulier on note que $m \in [\![0, n-1]\!]$.
    D'où par propriété du PGCD puis par $\mathcal{H}_m$.

$$\begin{aligned} a_n \wedge b_n &= a_{2m} \wedge b_{2m} \\ &= a_m \wedge (a_m + b_m) \\ &= a_m \wedge b_m \\ &= 1 \end{aligned}$$

  - Dans le cas où n est impair, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m+1$. En particulier on note que $m \in [\![0, n-1]\!]$.
    D'où par propriété du PGCD puis par $\mathcal{H}_m$.

$$\begin{aligned} a_n \wedge b_n &= a_{2m+1} \wedge b_{2m+1} \\ &= (a_m + b_m) \wedge b_m \\ &= a_m \wedge b_m \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Dans tous les cas $a_n \wedge b_n = 1$ et donc on a bien $\mathcal{H}_n$.
- **Conclusion**
  On a montré $\mathcal{H}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathcal{H}_k) \Rightarrow \mathcal{H}_n$.

Par principe de récurrence (forte) on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \wedge b_n = 1}.$$

Remarque: en pratique on peut faire tout l'exercice sans utiliser cette question. Il s'agit d'une question d'échauffement pour les récurrences qui suivent.

1.2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que p et q sont premiers entre eux. Montrer que
- **Si** $p \geq q$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p-q}{q}$ **alors** il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.
- **Si** $p < q$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p}{q-p}$ **alors** il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.

- **Supposons** que $p \geq q$ et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p-q}{q}$.
  Fixons un tel $m \in \mathbb{N}$.
  Alors $a_{2m+1} = a_m + b_m = p - q + q = p$ et $b_{2m+1} = b_m = q$ et donc avec $n = 2m+1$ on a bien exhibé un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}}$.
- **Supposons** que $p < q$ et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p}{q-p}$.
  Fixons un tel $m \in \mathbb{N}$.
  Alors $a_{2m} = a_m = p$ et $b_{2m} = p + q - p = q$ et donc avec $n = 2m$ on a bien exhibé un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}}$.

Remarque: la preuve ci-dessus identifie $a_m = p - q$ et $b_m = q$ (resp. $a_m = p$ et $b_m = q - p$) à partir de l'égalité des fractions, ce qui repose sur l'irréductibilité des deux membres (question précédente et primalité relative de p et q). Le résultat reste en fait vrai sans supposer p et q premiers entre eux : dans le premier cas $\frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}} = \frac{a_m+b_m}{b_m} = \frac{a_m}{b_m} + 1 = \frac{p-q}{q} + 1 = \frac{p}{q}$; dans le second, de $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p}{q-p}$ on tire $(q-p)a_m = pb_m$ d'où $qa_m = p(a_m + b_m)$ et donc $\frac{a_{2m}}{b_{2m}} = \frac{a_m}{a_m+b_m} = \frac{p}{q}$. C'est cette version sans primalité relative qui sera utilisée dans la deuxième méthode de la question suivante.

1.3. En déduire par une récurrence bien choisie que

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ r = \frac{a_n}{b_n}.$$

Cela revient à montrer que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_n}{b_n}$$

ou alternativement en utilisant l'écriture sous forme irréductible de tout rationnel

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ t.q } p \wedge q = 1,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{p}{q} = \frac{a_n}{b_n}.$$

L'idée est d'utiliser la question précédente et de procéder par récurrence (forte). Comme il y a deux variables (p et q) et que selon les cas l'une ou l'autre varie, la subtilité est de bien choisir le schéma de récurrence. On propose ici deux méthodes différentes (mais il y en a d'autres).
Première méthode: par récurrence sur la hauteur (c'est à dire sur $p+q$).
Pour $H \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{Q}_H$ la propriété

« pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ t.q $p \wedge q = 1$ et $p + q \leq H$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p}{q} = \frac{a_n}{b_n}$ »

et montrons par récurrence sur H, que pour tout $H \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_H$.
Remarques
- On aurait pu remplacer dans l'hypothèse de récurrence $p + q \leq H$ par $p + q = H$ et dans ce cas effectuer une récurrence forte plutôt que simple.
- Un tel schéma de récurrence (sur une fonction entière des paramètres plutôt que directement sur les paramètres) suit exactement les même étapes qu'une récurrence "classique".
  De manière générale étant donné un ensemble de paramètres Λ, un prédicat $\mathcal{P}(\lambda)$ (où $\lambda \in \Lambda$) et une fonction $\phi\colon \Lambda \to \mathbb{N}$, effectuer une récurrence sur la valeur de ϕ, c'est à dire avec une hypothèse $\mathcal{H}_n$ de la forme «$\forall \lambda \in \Lambda, \phi(\lambda) = n \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$» permet de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{P}(\lambda)$.
  En effet si par l'absurde il existe $\lambda \in \Lambda$ ne vérifiant pas $\mathcal{P}(\lambda)$ alors l'ensemble $\{\phi(\lambda),\ \lambda \in \{\lambda \in \Lambda \mid \neg\mathcal{P}(\lambda)\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ ce qui est absurde par initialisation et hérédité.

▶ **Initialisation**
Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tq $p + q \leq H$. Alors $p = 0$ et $q = 1$ d'où avec $n = 0$ on a bien $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.

▶ **Hérédité**
Soit $H \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{Q}_H$.
Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p + q \leq H + 1$.
Si $p + q \leq H$, alors par hypothèse de récurrence il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.
On suppose désormais que $p + q = H + 1$ et on procède par disjonction de cas.
▷ Si $p \geq q$, alors $(p-q) + q = p < p + q$ (car $q \geq 1$) et donc $(p-q) + q \leq H$.
Par hypothèse de récurrence il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m} = \frac{p-q}{q}$.
Par la question **1.2.** il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$.

▷ Si $p<q$, alors $p+(q-p)=q$. Comme p et q premiers entre eux et $p+q\geq 2$ on a $p\geq 1$ d'où $p+(q-p)=q\leq H$.
Par hypothèse de récurrence il existe donc $m\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m}=\frac{p}{q-p}$.
Par la question **1.2.** il existe alors $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$.
Dans tous les cas il existe bien $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$.

► **Conclusion**
On a montré $\mathcal{Q}_0$ et $\forall H\in\mathbb{N},\mathcal{Q}_H\Rightarrow\mathcal{Q}_{H+1}$.
Donc par récurrence,

$$\forall H\in\mathbb{N},\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \text{ t.q } p\wedge q=1 \text{ et } p+q\leq H,\exists n\in\mathbb{N},\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$$

c'est à dire

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \text{ t.q } p\wedge q=1,\exists n\in\mathbb{N},\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}.$$

Deuxième méthode: par récurrences emboîtés.
Comme il y a deux paramètres on effectue par exemple une récurrence sur p (pour tout q) et à l'intérieur de la récurrence sur p une récurrence sur q. Remarques
- Ici l'ordre dans lequel les paramètres sont emboîtés importe peu. Souvent dans de telles récurrences emboîtés l'ordre des paramètres est essentiel.
- Ce type de récurrence revient à effectuer une récurrence sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ muni de l'*ordre lexicographique* (cf plus tard dans l'année). Un tel schéma de récurrence est possible car $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ muni d'un tel ordre tout ensemble non vide admet un plus petit élément (cf remarque précédente).
- Afin de varier on va dans cette variante ne pas utiliser le fait que les fractions irréductibles.

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}_{p,q}$ la propriété

$$\exists n\in\mathbb{N},\ \frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$$

et pour $p\in\mathbb{N}$ notons $\widetilde{\mathcal{P}}_p$ la propriété

$$\forall q\in\mathbb{N}^*,\mathcal{P}_{p,q}.$$

Montrons par récurrence forte sur $p\in\mathbb{N}$ que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_p$.

► **Initialisation**
Pour $p=0$, on a bien pour tout $q\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a_0}{b_0}=\frac{0}{q}$.

► **Hérédité**
Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que pour tout $a\in[\![0,p]\!]$, $\widetilde{\mathcal{P}}_a$.
On cherche à montrer $\widetilde{P}_{p+1}$, c'est à dire que pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{p+1,q}$. Pour cela on procède par récurrence forte sur q ($p+1$ est fixé).

▷ **Initialisation**
Pour $q=1$, on cherche à montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p+1}{1}$.
Comme $p+1\geq 1$ et que par $\widetilde{P}_p$ il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m}=\frac{p+1-1}{1}$, par la question **1.2.** (qui n'utilise pas la primalité relative), il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p+1}{1}$.
D'où $\mathcal{P}_{p+1,1}$.

▷ **Hérédité**
Soit $q\in\mathbb{N}^*$.
Supposons que pour tout $b\in[\![1,q]\!]$, $\mathcal{P}_{p+1,b}$.
On procède par disjonction de cas.
- Si $q+1>p+1$, alors comme $(q+1)-(p+1)=q-p\in[\![1,q]\!]$ par $\mathcal{P}_{p+1,q-p}$ il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m}=\frac{p+1}{(q+1)-(p+1)}$ et donc par la question **1.2.** il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p+1}{q+1}$.
- Si $q+1\leq p+1$, alors comme $(p+1)-(q+1)=p-q\in[\![0,p-1]\!]\subset[\![0,p]\!]$, par $\widetilde{\mathcal{P}}_{p-q}$ (y compris dans le cas $q=p$, où l'on invoque $\widetilde{\mathcal{P}}_0$) il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_m}{b_m}=\frac{(p+1)-(q+1)}{q+1}$ et donc par la question **1.2.** il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p+1}{q+1}$.

Dans tous les cas il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a_n}{b_n}=\frac{p+1}{q+1}$.

▷ **Conclusion**
On a montré $\mathcal{P}_{p+1,1}$ et $\forall q\in\mathbb{N}^*,(\forall b\in[\![1,q]\!],\mathcal{P}_{p+1,b})\Rightarrow\mathcal{P}_{p+1,q+1}$.
Donc par récurrence $\widetilde{\mathcal{P}}_{p+1}$.

► **Conclusion**
On a montré $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ et $\forall p\in\mathbb{N},\left(\forall a\in[\![0,p]\!],\widetilde{\mathcal{P}}_a\right)\Rightarrow\widetilde{\mathcal{P}}_{p+1}$.
Donc par récurrence

$$\boxed{\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\ \exists n\in\mathbb{N},\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}}.$$

1.4. Montrer par récurrence que

$$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N},\ \frac{a_{n_1}}{b_{n_1}}=\frac{a_{n_2}}{b_{n_2}}\Rightarrow n_1=n_2.$$

On constate tout d'abord que par définition de la suite pour tout n, si n est pair alors $a_n < b_n$ et si n est impair alors $a_n \geq b_n$.
On en déduit que pour tout n, si $a_n < b_n$ alors n est pair et si $a_n \geq b_n$ alors n est impair.
On constate aussi que par unicité de l'écriture d'un rationnel sous forme irréductible, que si il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{a_{n_1}}{b_{n_1}} = \frac{a_{n_2}}{b_{n_2}}$ alors $a_{n_1} = a_{n_2}$ et $b_{n_1} = b_{n_2}$.
Afin de varier, à la place d'une récurrence on propose ici un argument de minimalité (équivalent à une récurrence, essayez par exemple de rédiger la preuve via récurrence comme exercice).
Supposons par l'absurde qu'il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_1 \neq n_2$ et $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.
Considérons

$$A = \{n_1 \in \mathbb{N} | \exists n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 \neq n_1 \text{ et } (a_1, b_1) = (a_2, b_2)\}$$

qui est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Considérons n_1 son plus petit élément. Soit n_2 tel que $n_2 \neq n_1$ et $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.
On procède par disjonction de cas.

- Si $a_{n_1} \geq b_{n_1}$ alors n_1 est impair et de même n_2 est impair (car $a_{n_2} = a_{n_1} \geq b_{n_1} = b_{n_2}$).
  Soient m_1 et m_2 les entiers tels que $n_1 = 2m_1 + 1$ et $n_2 = 2m_2 + 1$.
  Alors comme
  $$\begin{cases} a_{m_1} + b_{m_1} = a_{m_2} + b_{m_2} \\ b_{m_1} = b_{m_2} \end{cases}$$
  on a $b_{m_1} = b_{m_2}$ et $a_{m_1} = a_{m_2}$.
  Or $m_1 < n_1$ (car $n_1 = 2m_1 + 1$), et $m_1 \neq m_2$ (car $2m_1 + 1 \neq 2m_2 + 1$), ce qui est **absurde** (par minimalité de n_1).
- Si $a_{n_1} < b_{n_1}$ alors n_1 est pair et de même n_2 est pair.
  Comme pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 1$ on a $n_1 > 0$.
  Soient m_1 et m_2 les entiers tels que $n_1 = 2m_1$ et $n_2 = 2m_2$.
  Alors comme
  $$\begin{cases} a_{m_1} = a_{m_2} \\ a_{m_1} + b_{m_1} = a_{m_2} + b_{m_2} \end{cases}$$
  on a $b_{m_1} = b_{m_2}$ et $a_{m_1} = a_{m_2}$.
  Or $m_1 < n_1$ (car $n_1 = 2m_1$ et $n_1 > 0$), et $m_1 \neq m_2$ (car $2m_1 \neq 2m_2$), ce qui est **absurde** (par minimalité de n_1).

Dans tous les cas on obtient une contradiction.
On en déduit donc que A est vide, c'est à dire que

$$\boxed{\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n_1}}{b_{n_1}} = \frac{a_{n_2}}{b_{n_2}} \Rightarrow n_1 = n_2}.$$

1.5. Écrire une fonction python `bijection_explicite(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant le tuple (a_n, b_n).
Par exemple `bijection_explicite(48)` renvoie (a_{48}, b_{48}) c'est à dire `(2,9)`.

Il y a de nombreuses solutions possibles.

- On peut par exemple calculer itérativement le tableau des (a_n, b_n) jusqu'à n et renvoyer le dernier élément.

```
def bijection_explicite(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie le tuple (a_n,b_n) du DM2bis.
    Pour cela on procède itérativement en établissant la liste des (a_k,b_k) pour k entre 0 et
    ↪ n
    """
    liste_r = [(0, 1)]  # Liste des rationnels initialisée à (a_0,b_0)
    # On construit le tableau
    for k in range(1, n + 1):
        if k % 2 == 0:  # Si k est pair
            m = k // 2
            a, b = liste_r[m]
            liste_r.append((a, a + b))
        else:  # Si k est impair
            m = (k - 1) // 2
            a, b = liste_r[m]
            liste_r.append((a + b, b))
    return liste_r[n]
```

- On peut aussi utiliser une fonction **récursive** (cf cours d'informatique plus tard dans l'année).

```
def bijection_explicite(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie le tuple (a_n,b_n) du DM2bis.
    Pour cela on procède récursivement.
    """
    if n == 0:  # Le cas initial
        return (0, 1)
```

```
    elif n % 2 == 0:  # Si n est pair
        (a, b) = bijection_explicite(n // 2)
        return (a, a + b)
    else:  # Si n est impair
        (a, b) = bijection_explicite((n - 1) // 2)
        return (a + b, b)
```

- On peut aussi se rendre compte que la suite des opérations à effectuer dépend de l'écriture binaire de n et en déduire un programme itératif.

```
def ecriture_binaire(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie son écriture sous forme de liste, en partant du bit de poids fort."""
    liste_binaire = []
    # On calcule la liste des bits en partant de celle de poids faible
    while n > 0:
        liste_binaire.append(n % 2)
        n = n // 2
    return liste_binaire[::-1]  # On renverse la liste


def bijection_explicite(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie le tuple (a_n,b_n) du DM2bis.
    Pour cela on calcule l'écriture en base de 2 de n pour déterminer la suite des opérations à effectuer.
    """
    liste_binaire = ecriture_binaire(n)
    a, b = 0, 1
    # La liste des bits permet de déterminer les opérations à effectuer
    for bit in liste_binaire:
        if bit == 0:
            a, b = a, a + b
        else:
            a, b = a + b, b
    return (a, b)
```