Bicommutant et réduction de Frobenius

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Rappel de définitions usuelles

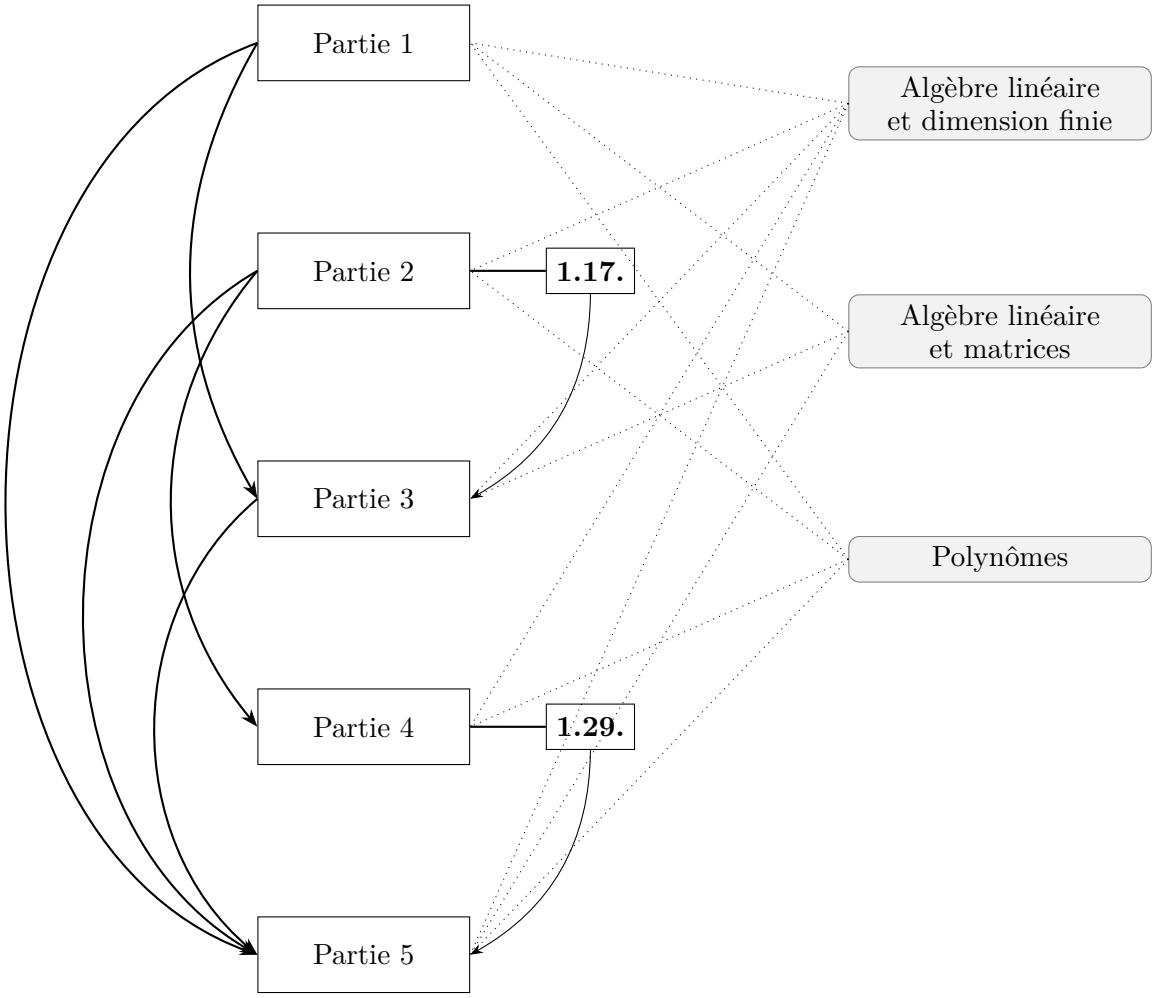
- Dans tout le sujet $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On rappelle que l'on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  Attention: X représente donc l'indéterminée polynomiale et non un vecteur.
- On rappelle que $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une **sous-algèbre de** $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ssi $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, contenant I_n, et stable par produit matriciel.
- On rappelle que l'on identifie par ailleurs $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des vecteurs colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On rappelle que pour $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on note
$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$
- On rappelle que pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A et B sont **semblables** et on note
$$A \sim B$$
ssi existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = UBU^{-1}$.
- On rappelle que pour $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on note
$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$
Attention: en particulier pour $y \in E$,
$$P(u)(y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k(y) \in E.$$
- On rappelle que pour F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, on dit que F est **stable** par u ssi $u(F) \subset F$.
  Dans ce cas l'application **induite** de u sur F, notée u_F est l'endomorphisme de F définie par
$$u_F : \begin{array}{c} F \to F \\ y \mapsto u(y). \end{array}$$

---

1. Bicommutant et réduction de Frobenius

Dépendances

Les dépendances des parties et les thèmes principaux sont représentés sur le graphe suivant.
On pourra admettre les résultats d'une question, en l'indiquant clairement sur sa copie, pour traiter les questions suivantes.
On notera notamment qu'il est possible d'admettre le résultat de la question **1.17.** pour traiter la partie 1.III.



Notations du problème

- Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on note
  - ▷ l'algèbre engendrée par A,
$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$
l'ensemble des polynômes en A. C'est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ▷ le commutant de A,
$$\mathrm{Com}(A) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$$
l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
  - ▷ le bicommutant de A,
$$\mathrm{Bicom}(A) = \{C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall (B \in \mathrm{Com}(A)), CB = BC\}$$
l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices qui commutent avec A.
- On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est **cyclique** ssi il existe $\Xi \in \mathbb{K}^n$ tel que $(\Xi, A\Xi, \ldots, A^{n-1}\Xi)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

L'objectif du problème est d'étudier les liens entre ces notions.

1.I. Premières constatations et premiers exemples

1.1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Bicom}(A)$ sont des sous-algèbres de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$\mathbb{K}[A] \subset \mathrm{Bicom}(A) \subset \mathrm{Com}(A).$$

1.3. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose $A \sim B$.
Montrer que

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathbb{K}[A]\right) &= \dim\left(\mathbb{K}[B]\right),\\ \dim\left(\mathrm{Com}(A)\right) &= \dim\left(\mathrm{Com}(B)\right),\\ \dim\left(\mathrm{Bicom}(A)\right) &= \dim\left(\mathrm{Bicom}(B)\right).\end{aligned}$$

1.4. Déterminer $\dim(\mathrm{Com}(I_n))$.

1.5. Soit $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ CB = BC.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C = \lambda I_n.$$

1.6. En déduire que

$$\mathrm{Bicom}(I_n) = \mathbb{K}[I_n].$$

et déterminer $\dim(\mathrm{Bicom}(I_n))$.

1.7. Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\mathrm{Com}(J_r) = \left\{ \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix}, (B_{11}, B_{22}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \right\}.$$

1.8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. On pose $r = \mathrm{rg}(A)$.
Déterminer $\dim(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de n et r.

1.9. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. On pose $r = \mathrm{rg}(A)$.
Montrer que

$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A]$$

et déterminer $\dim(\mathrm{Bicom}(A))$ en fonction de n et r.

1.II. Décomposition de Frobenius faible

Dans cette partie on fixe E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1.10. Soit $y \in E$. Montrer qu'il existe un et unique polynôme unitaire $\pi_{u,y} \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(y) = 0_E \iff \pi_{u,y} | P$$

Dans la suite pour tout $y \in E$ on note $\pi_{u,y}$ ce polynôme, $d_y = \deg(\pi_{u,y})$, et on note

$$\mathbb{K}[u](y) = \{P(u)(y), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

1.11. Soit $y \in E$.
Montrer que $\mathbb{K}[u](y)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

1.12. Soit $y \in E$.
Montrer que $(y, u(y), \dots, u^{d_y-1}(y))$ est une base de $\mathbb{K}[u](y)$.

1.13. Montrer que

$$d = \max(\{d_y, y \in E\}) \geq 1$$

est bien défini et justifier l'existence d'un couple $(\varphi, \xi) \in E^* \times E$ tel que

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, d-2]\!],\ \varphi(u^k(\xi)) = 0 \\ \varphi(u^{d-1}(\xi)) = 1 \end{aligned}.$$

On fixe dans la suite cet entier d et un tel couple $(\varphi, \xi) \in E^* \times E$.
On pose

$$S_\varphi = \bigcap_{P \in \mathbb{K}[X]} \mathrm{Ker}(\varphi \circ P(u)).$$

1.14. Montrer que S_φ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u et vérifiant

$$\dim(S_\varphi) \geq n - d.$$

Indication: on pourra commencer par montrer que pour tout $y \in E$, $(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u](y)$.

1.15. Montrer que

$$\mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi = \{0_E\}.$$

1.16. Conclure que

$$E = \mathbb{K}[u](\xi) \oplus S_\varphi.$$

1.17. Démontrer le théorème de décomposition faible de Frobenius:
Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ telles que

- On a la similitude

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

- et

$$A_1 \text{ est cyclique.}$$

1.III. Lien avec le commutant

Dans les questions **1.18.** à **1.20.** on fixe A une matrice cyclique et $\Xi \in \mathbb{K}^n$ tel que $(\Xi, A\Xi, \dots, A^{n-1}\Xi)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

1.18. Montrer que

$$\dim(\mathbb{K}[A]) \geq n.$$

1.19. Montrer l'application linéaire

$$\begin{aligned} \text{eval}_\Xi : \begin{array}{c} \text{Com}(A) \to \mathbb{K}^n \\ B \mapsto B\Xi \end{array} \end{aligned}$$

est injective.

1.20. Déduire des questions précédentes que

$$\text{Com}(A) = \mathbb{K}[A]$$

et que

$$\dim(\text{Com}(A)) = n.$$

1.21. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\dim\left(\text{Com}\left(A\right)\right) \geq \dim(\text{Com}(A_1)) + \dim(\text{Com}(A_2)).$$

1.22. Déduire des questions précédentes que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\dim(\text{Com}(A)) \geq n.$$

1.IV. Frobenius faible était en fait fort

On reprend dans cette partie les notations de la sous-partie 1.II.

1.23. Montrer qu'il existe un et unique polynôme unitaire π_u tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad (\forall y \in E, P(u)(y) = 0_E) \iff \pi_u | P.$$

1.24. En déduire qu'il existe une famille **finie** $(y_1, \dots, y_N)$ de vecteurs de E telle que

$$\{\pi_{u,y}, y \in E\} = \{\pi_{u,y_1}, \pi_{u,y_2}, \dots, \pi_{u,y_N}\}.$$

Indication: On pourra s'intéresser à la Décomposition en Facteurs Irréductibles de π_u.

Dans les questions **1.25.** à **1.26.** on fixe $F_1, \dots, F_N$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = E \quad \text{et} \quad F_1 \not\subset \bigcup_{i=2}^{n} F_i.$$

1.25. Soit $y_1 \in F_1$ tel que $y_1 \notin \bigcup_{i=2}^{n} F_i$.
Soit $z \in E$.
Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists i_\lambda \in [\![1, N]\!], \lambda y_1 + z \in F_{i_\lambda}.$$

1.26. En déduire que $E = F_1$.
Indication: on pourra commencer par montrer que, avec les notations précédentes, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts tels que $F_{i_\lambda} = F_{i_\mu}$.

1.27. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tous $F_1, \dots, F_N$ sous-espaces vectoriels de E on a

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i = E \implies \exists i \in [\![1, N]\!], F_i = E.$$

1.28. Conclure qu'avec d fixé à la sous-partie 1.II (c'est à dire $d = \max(\{\deg(\pi_{u,y}, y \in E)\})$), on a

$$\deg(\pi_u) = d.$$

De même que précédemment pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe un et unique polynôme unitaire $\pi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = 0_n$ ssi $\pi_A \mid P$ (on ne demande pas de le redémontrer).

1.29. Démontrer le théorème de décomposition forte de Frobenius:
Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ telles que

- On a la similitude
$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$
- et
$$A_1 \text{ est cyclique}$$
- et la divisibilité de polynômes minimaux
$$\pi_{A_2} \mid \pi_{A_1}.$$

1.V. Lien avec le bicommutant

1.30. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ un endomorphisme cyclique.
Montrer que

$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A].$$

1.31. Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ ainsi que $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$.
On suppose que

$$\pi_{u_2,y_2} \mid \pi_{u_1,y_1}.$$

Montrer que

$$\tau : \begin{array}{c} \mathbb{K}[u_1](y_1) \to \mathbb{K}[u_2](y_2) \\ P(u_1)(y_1) \mapsto P(u_2)(y_2) \end{array}$$

est bien définie, linéaire et surjective.

1.32. Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, $A_1 \in \mathrm{M}_{d_1}(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{d_2}(\mathbb{K})$ toutes les deux cycliques et telles que $\pi_{A_2} | \pi_{A_1}$.
Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_{d_2,d_1}(\mathbb{K})$ telle que

$$TA_1 = A_2T$$

et

$$\mathrm{rg}(T) = d_2.$$

1.33. Conclure que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A].$$

Indication: vu qu'il s'agit de la dernière question d'un sujet assez long, on pourra se contenter d'une explication des grandes étapes de la preuve.