En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Rappel de définitions usuelles

- Dans tout le sujet $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On rappelle que l'on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  Attention: X représente donc l'indéterminée polynomiale et non un vecteur.
- On rappelle que $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une **sous-algèbre de** $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ssi $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, contenant I_n, et stable par produit matriciel.
- On rappelle que l'on identifie par ailleurs $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des vecteurs colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On rappelle que pour $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on note
$$P(A) = \sum_{k=0}^n \lambda_k A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$
- On rappelle que pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A et B sont **semblables** et on note
$$A \sim B$$
ssi existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = UBU^{-1}$.
- On rappelle que pour $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on note
$$P(u) = \sum_{k=0}^n \lambda_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$
Attention: en particulier pour $y \in E$,
$$P(u)(y) = \sum_{k=0}^n \lambda_k u^k(y) \in E.$$
- On rappelle que pour F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, on dit que F est **stable** par u ssi $u(F) \subset F$.
  Dans ce cas l'application **induite** de u sur F, notée u_F est l'endomorphisme de F définie par
$$u_F : \begin{array}{l} F \to F \\ y \mapsto u(y). \end{array}$$

---

1. Bicommutant et réduction de Frobenius

Notations du problème

- Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on note
  ▷ l'algèbre engendrée par A,
  $$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$
  l'ensemble des polynômes en A. C'est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
  ▷ le commutant de A,
  $$\mathrm{Com}(A) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$$
  l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
  ▷ le bicommutant de A,
  $$\mathrm{Bicom}(A) = \{C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall (B \in \mathrm{Com}(A)), CB = BC\}$$
  l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices qui commutent avec A.
- On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est **cyclique** ssi il existe $\Xi \in \mathbb{K}^n$ tel que $(\Xi, A\Xi, \dots, A^{n-1}\Xi)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

L'objectif du problème est d'étudier les liens entre ces notions.

1.I. Premières constatations et premiers exemples

1.1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Bicom}(A)$ sont des sous-algèbres de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- On a $I_nA = A = AI_n$ donc $\underline{I_n \in \mathrm{Com}(A)}$.
- Soient $B_1, B_2 \in \mathrm{Com}(A)$.
  Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
  On a
$$\begin{aligned}(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)A &= \lambda_1 B_1 A + \lambda_2 B_2 A \\ &= \lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2 \\ &= A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2).\end{aligned}$$
  et donc $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \in \mathrm{Com}(A)$.
  Par conséquent $\underline{\mathrm{Com}(A) \text{ est stable par combinaisons linéaires}}$.
- Soient $B_1, B_2 \in \mathrm{Com}(A)$.
  On a
$$B_1 B_2 A = B_1 A B_2 = A B_1 B_2$$
  et donc $B_1 B_2 \in \mathrm{Com}(A)$.
  Par conséquent $\underline{\mathrm{Com}(A) \text{ est stable par produit}}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Com}(A) \text{ est une sous-algèbre de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

- Soit $B \in \mathrm{Com}(A)$.
  On a $I_nB = BI_n$ donc $I_n \in \mathrm{Bicom}(A)$.
- Soient $C_1, C_2 \in \mathrm{Bicom}(A)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
  Soit $B \in \mathrm{Com}(A)$.
  On a
$$\begin{aligned}(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)B &= \lambda_1 C_1 B + \lambda_2 C_2 B \\ &= \lambda_1 BC_1 + \lambda_2 BC_2 \\ &= B(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2).\end{aligned}$$
  On a donc montré que $\forall B \in \mathrm{Com}(A), (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)B = B(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)$ c'est à dire $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Par conséquent $\underline{\mathrm{Bicom}(A) \text{ est stable par combinaisons linéaires}}$.
- Soient $C_1, C_2 \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Soit $B \in \mathrm{Com}(A)$.
  On a
$$C_1 C_2 B = C_1 B C_2 = B C_1 C_2.$$
  On a donc montré
$$\forall B \in \mathrm{Com}(A),\ (C_1C_2)B = B(C_1C_2)$$
  c'est à dire $C_1C_2 \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Par conséquent $\underline{\mathrm{Bicom}(A) \text{ est stable par produit}}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Bicom}(A) \text{ est une sous-algèbre de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Remarque: On pourrait de manière générale définir pour $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Com}(\mathcal{A}) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{A}, AB = BA\}$ et montrer que $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Et en particulier $\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}(\{A\})$ ainsi que $\mathrm{Bicom}(A) = \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$.

1.2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que
$$\mathbb{K}[A] \subset \mathrm{Bicom}(A) \subset \mathrm{Com}(A).$$

- Soit $C \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Comme $AA = AA$ on a $A \in \mathrm{Com}(A)$.
  Donc $C \in \mathrm{Com}(A)$.
  Ainsi $\boxed{\mathrm{Bicom}(A) \subset \mathrm{Com}(A)}$.
- Soit $C \in \mathbb{K}[A]$.
  Fixons $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $C = P(A)$.
  Soit $B \in \mathrm{Com}(A)$.
  Cela revient à $A \in \mathrm{Com}(B)$.
  Comme $\mathrm{Com}(B)$ est une algèbre, on en déduit $P(A) \in \mathrm{Com}(B)$, c'est à dire $C \in \mathrm{Com}(B)$.
  On a donc montré que pour tout $B \in \mathrm{Com}(A)$, $C \in \mathrm{Com}(B)$ c'est à dire $C \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Donc $\boxed{\mathbb{K}[A] \subset \mathrm{Bicom}(A)}$.
  Remarque: une rédaction plus succincte à méditer est la suivante:
  «Comme $A \in \mathrm{Bicom}(A)$ et $\mathrm{Bicom}(A)$ est une algèbre alors $\mathbb{K}[A] \subset \mathrm{Bicom}(A)$.»

1.3. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose $A \sim B$.
Montrer que

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathbb{K}[A]\right) &= \dim\left(\mathbb{K}[B]\right),\\ \dim\left(\mathrm{Com}(A)\right) &= \dim\left(\mathrm{Com}(B)\right),\\ \dim\left(\mathrm{Bicom}(A)\right) &= \dim\left(\mathrm{Bicom}(B)\right).\end{aligned}$$

Fixons $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = UBU^{-1}.$$

L'application

$$\Xi_P : \begin{array}{c}\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\\ M \mapsto UMU^{-1}\end{array}$$

est linéaire, par linéarité du produit matriciel, et bijective, car de réciproque $\Xi_{U^{-1}} : \begin{array}{c}\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\\ U \mapsto U^{-1}MU\end{array}$.

- Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a la suite d'équivalences,

$$\begin{aligned}M \in \mathbb{K}[A] &\iff \exists P \in \mathbb{K}[X], M = P(A)\\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}[X], M = P(UBU^{-1})\\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}[X], M = UP(B)U^{-1}\\ &\iff M \in \Xi_U(\mathbb{K}[B])\end{aligned}$$

  Par conséquent

$$\mathbb{K}[A] = \Xi_U(\mathbb{K}[B])$$

  et en particulier, comme Ξ_U est un isomorphisme, $\boxed{\dim(\mathbb{K}[A]) = \dim(\mathbb{K}[B])}$.
- De même soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a la suite d'équivalences ,

$$\begin{aligned}M \in \mathrm{Com}(A) &\iff AM = MA\\ &\iff UBU^{-1}M = MUBU^{-1}\\ &\iff BU^{-1}MU = U^{-1}MUB\\ &\iff \Xi_{U^{-1}}(M) \in \mathrm{Com}(B).\end{aligned}$$

  Par conséquent

$$\mathrm{Com}(A) = \Xi_U(\mathrm{Com}(B))$$

  et en particulier, comme Ξ_U est un isomorphisme, $\boxed{\dim(\mathrm{Com}(A)) = \dim(\mathrm{Com}(B))}$.
- Enfin soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Par le point précédent on a la suite d'équivalence,

$$\begin{aligned}M \in \mathrm{Bicom}(A) &\iff \forall N \in \mathrm{Com}(A) MN = NM\\ &\iff \forall \widetilde{N} \in \mathrm{Com}(B), MU\widetilde{N}U^{-1} = U\widetilde{N}U^{-1}M\\ &\iff \forall \widetilde{N} \in \mathrm{Com}(B), U^{-1}MU\widetilde{N} = \widetilde{N}U^{-1}MU\\ &\iff \Xi_{U^{-1}}(M) \in \mathrm{Bicom}(B).\end{aligned}$$

  Par conséquent

$$\mathrm{Bicom}(A) = \Xi_U(\mathrm{Bicom}(B))$$

  et en particulier, comme Ξ_U est un isomorphisme, $\boxed{\dim(\mathrm{Bicom}(A)) = \dim(\mathrm{Bicom}(B))}$.

1.4. Déterminer $\dim(\mathrm{Com}(I_n))$.

On a toute matrice commute avec I_n, c'est à dire $\mathrm{Com}(I_n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Ainsi

$$\boxed{\dim(\mathrm{Com}(I_n)) = n^2}.$$

1.5. Soit $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ CB = BC.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C = \lambda I_n.$$

Notons $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a en particulier $CE_{ij} = E_{ij}C$.
C'est à dire

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ (CE_{ij})_{kl} = (E_{ij}C)_{kl}$$

ou encore

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ C_{ki}\delta_{jl} = \delta_{ik}C_{jl}.$$

Ainsi

$$\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4,\ C_{ki}\delta_{jl} = \delta_{ik}C_{jl}.$$

- Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$.
  On a donc
  $$C_{ij}\delta_{ii} = \delta_{ji}C_i i$$
  i.e
  $$C_{ij} = 0.$$
- Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
  On a donc
  $$C_{ii}\delta_{11} = \delta_{ii}C_{11}$$
  i.e
  $$C_{ii} = C_{11}.$$

On en déduit donc que $C = C_{11}I_n$.
D'où $\boxed{C \in \mathrm{Vect}(I_n)}$.

1.6. En déduire que

$$\mathrm{Bicom}(I_n) = \mathbb{K}[I_n].$$

et déterminer $\dim(\mathrm{Bicom}(I_n))$.

On a sait déjà par la question **1.2.** que $\mathbb{K}[I_n] \subset \mathrm{Bicom}(I_n)$.
Soit $C \in \mathrm{Bicom}(I_n)$.
Par la question **1.4.** on a $\mathrm{Com}(I_n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
D'où $\forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), CB = BC$.
Par la question **1.5.** on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $C = \lambda I_n$.
Avec $P = \lambda X$ on a donc $C = P(I_n)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Bicom}(I_n) = \mathbb{K}[I_n]}$.

1.7. Soit $r \in [\![0,n]\!]$ et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\mathrm{Com}(J_r) = \left\{ \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix}, (B_{11},B_{22}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \right\}.$$

On procède par double inclusion.
- $\boxed{\supset}$
  Soit $(B_{11},B_{22}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.
  Alors on a les produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Com}(J_r).$$

- $\boxed{\subset}$
  Soit $B \in \mathrm{Com}(J_r)$.
  On écrit B par blocs

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

où $B_{11} \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K})$, $B_{12} \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $B_{21} \in \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $B_{22} \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.
On a alors les produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ B_{21} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Or les deux produits sont égaux et donc $B_{12} = 0_{r,n-r}$ et $B_{21} = 0_{n-r,r}$.
Ainsi $B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix}$ avec $(B_{11}, B_{22}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\mathrm{Com}(J_r) = \left\{ \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix}, (B_{11}, B_{22}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \right\}}.$$

1.8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. On pose $r = \mathrm{rg}(A)$.
Déterminer $\dim(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de n et r.

Comme $A^2 = A$ son application linéaire canoniquement associée u_A vérifie $(u_A)^2 = u_A$ c'est à dire est un projecteur, de rang r.
Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = J_r$.
Ainsi $A \sim J_r$.
Par la question **1.3.** on a donc $\dim(\mathrm{Com}(A)) = \dim(\mathrm{Com}(J_r))$.
De plus l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K}) &\to \mathrm{Com}(J_r) \\ (B_{11}, B_{22}) &\mapsto \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est:
- bien définie et surjective par la question **1.7.**
- linéaire et injective (par linéarité et injectivité des coefficients par blocs)

d'où

$$\dim(\mathrm{Com}(J_r)) = \dim(\mathrm{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{M}_r(\mathbb{K})) + \dim(\mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})) = r^2 + (n-r)^2.$$

Ainsi

$$\boxed{\dim(\mathrm{Com}(A)) = r^2 + (n-r)^2}.$$

1.9. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. On pose $r = \mathrm{rg}(A)$.
Montrer que

$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A]$$

et déterminer $\dim(\mathrm{Bicom}(A))$ en fonction de n et r.

De même qu'à la question **1.8.** comme A est la matrice d'un projecteur de rang r on a $A \sim J_r$ et donc $\dim(\text{Bicom}(A)) = \dim(\text{Bicom}(J_r))$ ainsi que $\dim(\mathbb{K}[A]) = \dim(\mathbb{K}[J_r])$.
Il reste à déterminer $\text{Bicom}(J_r)$.
Soit $C \in \text{Bicom}(J_r)$.
En particulier par la question **1.2.** $C \in \text{Com}(J_r)$ et donc par la question **1.7.** il existe $C_{11} \in \text{M}_r(\mathbb{K})$ et $C_{22} \in \text{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ tels que

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Par la question **1.7.** on a pour tout $(B_{11}, B_{22}) \in \text{M}_r(\mathbb{K}) \times \text{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ on a

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & C_{22} \end{pmatrix}$$

c'est à dire (produit par blocs)pour tout $(B_{11}, B_{22}) \in \text{M}_r(\mathbb{K}) \times \text{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ on a

$$\begin{pmatrix} C_{11}B_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & C_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}C_{11} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & B_{22}C_{22} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \forall B_{11} \in \text{M}_r(\mathbb{K}),\ C_{11}B_{11} = B_{11}C_{11} \\ \forall B_{22} \in \text{M}_{n-r}(\mathbb{K}),\ C_{22}B_{22} = B_{22}C_{22}. \end{aligned}$$

Par la question **1.5.** on en déduit qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned} C_{11} &= \lambda_1 I_r \\ C_{22} &= \lambda_2 I_{n-r}. \end{aligned}$$

c'est à dire

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \lambda_2 I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Avec

$$P = (\lambda_1 - \lambda_2)X + \lambda_2$$

on a donc

$$C = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2) I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \lambda_2 I_{n-r} \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) J_r + \lambda_2 I_n = P(J_r).$$

Ainsi $\boxed{\text{Bicom}(J_r) \subset \mathbb{K}[J_r]}$.
Par la question **1.2.** on en déduit

$$\underline{\text{Bicom}(J_r) \subset \mathbb{K}[J_r]}.$$

En particulier $\dim(\text{Bicom}(A)) = \dim(\text{Bicom}(J_r)) = \dim(\mathbb{K}[J_r]) = \dim(\mathbb{K}[A])$ et par inclusion on en déduit finalement que

$$\boxed{\text{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A]}.$$

De plus pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a

$$P(J_r) = \begin{pmatrix} P(I_r) & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & P(0_{n-r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P(1) - P(0)) I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(0) I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & P(0) I_{n-r} \end{pmatrix} = (P(1) - P(0)) J_r + P(0) I_n.$$

L'autre inclusion étant toujours vraie on a donc

$$\mathbb{K}[J_r] = \left\{ aJ_r + bI_n, (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect}(I_n, J_r).$$

Remarque: une variante est de remarquer que $X^2 - X = X(X-1)$ annule J_r et d'effectuer la division euclidienne de P par $X(X-1)$.
Si $r = 0$, on $J_r = 0_n$ on a donc
$K[0_n] = \text{Vect}(I_n)$ et $\dim(\text{Bicom}(0_n)) = 1$.
Si $r = n$ on a $J_r = I_n$ et donc $\mathbb{K}[I_n] = \text{Vect}(I_n)$ et $\dim(\text{Bicom}(I_n)) = 1$.
Si $r \in [\![1, n-1]\!]$ on a (I_n, J_r) libre (car non colinéaire).
D'où

$$\boxed{\dim(\mathrm{Bicom}(A)) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in \{0, n\} \\ 2 & \text{si } r \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}}.$$

1.II. Décomposition de Frobenius faible

Dans cette partie on fixe E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1.10. Soit $y \in E$. Montrer qu'il existe un et unique polynôme unitaire $\pi_{u,y} \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(y) = 0_E \iff \pi_{u,y} | P$$

Soit $y \in E$.
Soit

$$\boxed{\mathcal{I}_{u,y} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(y)\}}.$$

- On a $\mathcal{I}_{u,y}$ noyau de l'application linéaire $\begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to E \\ P \mapsto P(u)(y) \end{array}$.
  Par conséquent $\mathcal{I}_{u,y}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et en particulier un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$.
- Soit $P \in \mathcal{I}_{u,y}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
  On a
  $$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$$
  et donc
  $$((QP)(u)) = Q(u)\,(P(u)(y)) = Q(u)\,(0_E) = 0_E.$$
  Donc $QP \in \mathcal{I}_{u,y}$. Par conséquent $\mathcal{I}_{u,y}$ est un stable par produit externe

Par conséquent $\mathcal{I}_{u,y}$ est un $\boxed{\text{idéal}}$ de $\mathbb{K}[X]$.
De plus la famille $(y, u^1(y), \dots, u^n(y)) \in E^{n+1}$ est une famille de $n+1$ vecteurs de E, de dimension n, et donc par dimension est liée.
Il existe donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k(y) = 0_E.$$

En posant

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$$

on a donc $P \in \mathcal{I}_{u,y}$ et $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Donc le théorème de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ il $\boxed{\text{existe un et unique } \pi_{u,y} \text{ unitaire}}$ tel que

$$\boxed{\mathcal{I}_{u,y} = \pi_{u,y}\mathbb{K}[X]}.$$

Enfin avec le P précédent on a $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\pi_{u,y} | P$.
Donc $\boxed{\pi_{u,y} \in \mathbb{K}_n[X]}$.

Dans la suite pour tout $y \in E$ on note $\pi_{u,y}$ ce polynôme, $d_y = \deg(\pi_{u,y})$, et on note

$$\mathbb{K}[u](y) = \{P(u)(y), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

1.11. Soit $y \in E$.
Montrer que $\mathbb{K}[u](y)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

En posant

$$\mathrm{eval}_y : \begin{array}{c} \mathbb{K}[u] \to E \\ v \mapsto v(y) \end{array}$$

on a eval_y est linéaire (linéarité de l'évaluation) et $\mathbb{K}[u](y) = \mathrm{Im}(\mathrm{eval}_y)$.
Donc $\boxed{\mathbb{K}[u](y) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Soit $z \in \mathbb{K}[u](y)$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $z = P(u)(y)$.
Alors $u(z) = (XP)(u)(y)$ et donc $u(z) \in \mathbb{K}[u](y)$.
Donc $\boxed{\mathbb{K}[u](y) \text{ est stable par } u.}$

1.12. Soit $y \in E$.
Montrer que $(y, u(y), \dots, u^{d_y-1}(y))$ est une base de $\mathbb{K}[u](y)$.

On a tout d'abord $\forall k \in [\![0, d_y - 1]\!], u^k(y) \in \mathbb{K}[u](y)$.

- **Liberté**
  Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d_y-1}) \in \mathbb{K}^{d_y}$ tel que
  $$\sum_{k=0}^{d_y-1} \lambda_k u^k(y) = 0_E.$$
  En posant $P = \sum_{k=0}^{d_y-1} \lambda_k X^k$ on a donc
  $$P(u)(y) = 0.$$
  Donc $\pi_{u,y} | P$ et donc $P \in \mathbb{K}_{d_y-1}[X]$.
  Donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ c'est à dire $\lambda_0 = \dots = \lambda_{d_y-1} = 0_{\mathbb{K}}$.
  D'où la $\boxed{\text{liberté}}$.
- **Générateur**
  Soit $y \in \mathbb{K}[u](y)$. Fixons $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(y)$.
  Considérons la division euclidienne de P par $\pi_{u,y}$:
  $$\begin{aligned} P &= Q\pi_{u,y} + R \\ \deg(R) &\leq d_y - 1 \end{aligned}$$
  En particulier en évaluant l'égalité polynomiale en u puis l'égalité d'endomorphismes en y,
  $$P(u)(y) = \underbrace{(Q\pi_{u,y})(u)(y)}_{0_E} + R(u)(y)$$
  Avec $R = \sum_{k=0}^{d_y-1} \lambda_k X^{\cdot}$ on a donc
  $$y = P(u)(y) = \sum_{k=0}^{d_y-1} \lambda_k u^k(y).$$
  D'où le $\boxed{\text{caractère générateur}}$.

Ainsi on a bien montré que $\boxed{(y, u(y), \dots, u^{d_y-1}(y)) \text{ est une base de } \mathbb{K}[u](y)}$.

1.13. Montrer que
$$d = \max(\{d_y, y \in E\}) \geq 1$$
est bien défini et justifier l'existence d'un couple $(\varphi, \xi) \in E^* \times E$ tel que
$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, d-2]\!],\ \varphi(u^k(\xi)) &= 0 \\ \varphi(u^{d-1}(\xi)) &= 1 \end{aligned}.$$

Par la question **1.10.**, on a pour tout $y \in E$, $d_y \leq n$.
Par conséquent l'ensemble $\{d_y, y \in E\}$ est une partie non vide (car E non vide) et majorée (par n) de $\mathbb{N}$.
Elle admet donc un maximum d'où la bonne définition de
$$\boxed{d = \max(\{d_y, y \in E\})}.$$
Enfin soit $y \in E \backslash \{0_E\}$. Alors $u^0(y) = y \neq 0_E$. Donc $\pi_{u,y} \not| X^0$ c'est à dire $d_y \geq 1$. Donc $\boxed{d \geq 1}$.
Par définition (un maximum est atteint) $\boxed{\text{il existe } \xi \in E}$ tel que
$$d_\xi = d.$$
Par la question **1.12.** la famille $(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi))$ est une base de $\mathbb{K}[u](\xi)$ et en particulier libre dans E.
Par le théorème de base incomplète on peut la compléter en $(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi), e_d, \dots, e_{n-1})$ base de E.

En notant $\varphi \in E^*$ la forme linéaire coordonnée selon $u^{d-1}(\xi)$ dans la base $(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi), e_d, \dots, e_{n-1})$ (c'est à dire $\varphi = (u^{d-1}(\xi))^*$) on a donc bien

$$\boxed{\begin{array}{r}\forall k \in [\![0, d-2]\!],\ \varphi(u^k(\xi)) = 0 \\ \varphi(u^{d-1}(\xi)) = 1\end{array}}.$$

On fixe dans la suite cet entier d et un tel couple $(\varphi, \xi) \in E^* \times E$.
On pose

$$S_\varphi = \bigcap_{P \in \mathbb{K}[X]} \mathrm{Ker}(\varphi \circ P(u)).$$

1.14. Montrer que S_φ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u et vérifiant

$$\dim(S_\varphi) \geq n - d.$$

Indication: on pourra commencer par montrer que pour tout $y \in E$, $(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u](y)$.

On a S_φ est un sev comme intersection de sous-espaces vectoriels (noyau).
Soit $y \in S_\varphi$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $(\varphi \circ P(u))(u(y)) = (\varphi \circ (PX)(u))(y) = 0_\mathbb{K}$ et donc $u(y) \in S_\varphi$.
Donc S_φ est stable par u.
Soit $y \in E$.
Comme $(u, u^2, \dots, u^{d_y - 1})$ est une base de $\mathbb{K}[u](y)$, elle est en particulier génératrice de $\mathbb{K}[u](y)$. De plus

$$d \geq d_y$$

et pour tout $k \in [\![d_y, d-1]\!]$, $u^k(y) \in \mathbb{K}[u](y)$.
Donc par ajout de vecteurs à une famille génératrice, $(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u](y)$.
Ainsi, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} y \in S_\varphi &\iff \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \varphi(P(u)(y)) = 0 \\ &\iff \mathbb{K}[u](y) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\iff \mathrm{Vect}(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\iff \forall k \in [\![0, d-1]\!],\ u^k(y) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\iff \forall k \in [\![0, d-1]\!],\ \varphi(u^k(y)) = 0 \\ &\iff y \in \bigcap_{k=0}^{d-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k) \end{aligned}.$$

Finalement on a donc

$$\boxed{S_\varphi = \bigcap_{k=0}^{d-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)}.$$

Et comme pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)$ est un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle (non nulle car $\varphi \circ u^k(u^{d-1-k}(\xi)) \neq 0_\mathbb{K}$), on en déduit donc que S_φ est l'intersection de d hyperplans.
Par conséquent

$$\boxed{\dim(S_\varphi) \geq n - d}.$$

1.15. Montrer que

$$\mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi = \{0_E\}.$$

Soit $y \in \mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi$.
Par la question **1.12.** il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que

$$y = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(\xi).$$

On remarque tout d'abord que

$$\varphi(y) = \lambda_{d-1}.$$

Supposons par l'absurde que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
L'ensemble $\{k \in [\![0, d-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$ étant alors une partie non vide majorée de n on peut définir.

$$k_0 = \max\{k \in [\![0, d-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}.$$

Alors

$$y = \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k u^k(\xi).$$

Comme $X^{d-1-k_0} \in \mathbb{K}[X]$ on a donc

$$\varphi(u^{d-1-k_0})(y) = 0$$

c'est à dire

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k u^{k+(d-1)-k_0}(y)\right) = 0$$

ou encore

$$\lambda_{k_0} = 0.$$

Cela est absurde.
Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) = (0, \dots, 0)$ c'est à dire $y = 0$.
Ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi = \{0_E\}}.$$

Remarque: on a présenté ici une preuve «par récurrence forte descendante» classique. Il y avait en fait une preuve polynomiale du même fait en remarquant que pour $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ (auquel on se ramène par division euclidienne par π), $\varphi(P(u)(y))$ n'est rien d'autre que le coefficient dominant de P.

1.16. Conclure que

$$E = \mathbb{K}[u](\xi) \oplus S_\varphi.$$

- Par la question **1.12.** on a que

$$\dim(\mathbb{K}[u](\xi)) = d$$

- Par la question **1.14.** on a que

$$\dim(S_\varphi) \geq n - d$$

- Par la question **1.15.** on a que

$$\mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi = \{0_E\}$$

- Par la formule de Grassmann on a donc

$$\dim(\mathbb{K}[u](\xi) + S_\varphi) = \dim(\mathbb{K}[u](\xi)) + \dim(S_\varphi) - \dim(\mathbb{K}[u](\xi) \cap S_\varphi) \geq d + n - d - 0 = n$$

et donc comme $\mathbb{K}[u](\xi) + S_\varphi \subset E$ on conclut par dimension que

$$E = \mathbb{K}[u](\xi) + S_\varphi.$$

Par conséquent on a bien

$$\boxed{E = \mathbb{K}[u](\xi) \oplus S_\varphi}.$$

1.17. Démontrer le théorème de décomposition faible de Frobenius:
Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ telles que

- On a la similitude

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

- et

$$A_1 \text{ est cyclique.}$$

Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A.
Fixons ξ et φ comme dans les questions précédentes (alors $d = \dim(\mathbb{K}[u](\xi))$).
Soit $(e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme directe

$$E = \mathbb{K}[u](\xi) \oplus S_\varphi.$$

- Comme $\mathbb{K}[u](\xi)$ et S_φ sont stables par u on a

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n)}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$.
C'est à dire comme deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases sont semblables on a

$$\boxed{A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}}.$$

- De plus

$$A_1 = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n)}(u_{\mathbb{K}[u](\xi)}.)$$

Or on a déjà vu que

$$(\xi, u_{\mathbb{K}[u](\xi)}(\xi), \dots, u^{d-1}_{\mathbb{K}[u](\xi)}(\xi))$$

est une base de $\mathbb{K}[u](\xi)$.
Par conséquent avec Ξ la matrice de ξ en tant que vecteur de $\mathbb{K}[u](\xi)$ i.e

$$\Xi = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n)}(\xi)$$

on a bien

$$(\Xi, A_1\Xi, \dots, A_1^{d-1}\Xi)$$

est une base de $\mathbb{K}^d$.
Donc

$$\boxed{A_1 \text{ est cyclique}}.$$

Remarque: au lieu de prendre une base adaptée quelconque il serait en fait plus pertinent de prendre directement $(\xi, u(\xi), \dots, u^{d-1}(\xi), e_d, \dots, e_{n-1})$ comme base de E.
On obtient alors que non seulement A_1 est cyclique mais qu'il s'agit en plus d'une matrice compagnon (la matrice compagnon de $\pi_{u,\xi}$) !

1.III. Lien avec le commutant

Dans les questions **1.18.** à **1.20.** on fixe A une matrice cyclique et $\Xi \in \mathbb{K}^n$ tel que $(\Xi, A\Xi, \dots, A^{n-1}\Xi)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

1.18. Montrer que

$$\dim(\mathbb{K}[A]) \geq n.$$

Montrons que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{K}[A]$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Alors en évaluant en Ξ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k \Xi = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Par liberté de $(\Xi, A\Xi, \dots, A^{n-1}\Xi)$ on a donc

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Donc la famille est libre et donc de cardinal n.
Donc $\boxed{\dim(\mathbb{K}[A]) \geq n}$.

1.19. Montrer l'application linéaire

$$\begin{aligned} \text{eval}_\Xi : \text{Com}(A) &\to \mathbb{K}^n \\ B &\mapsto B\Xi \end{aligned}$$

est injective.

On a eval_Ξ est linéaire par linéarité du produit matrice/vecteur.
Soit $B \in \text{Ker}(\text{eval}_\Xi)$.
On a $B\Xi = 0_{\mathbb{K}^n}$.
Comme $B \in \text{Com}(A)$ on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$BA^k\Xi = A^k B\Xi = A^k 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Comme $(\Xi, A\Xi, \ldots, A^{n-1}\Xi)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$ on a donc pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, $BY = 0_{\mathbb{K}^n}$. Donc $B = 0_{\text{M}_n(\mathbb{K})}$.
Donc $\boxed{\text{eval}_\Xi \text{ est injective}}$.

1.20. Déduire des questions précédentes que

$$\text{Com}(A) = \mathbb{K}[A]$$

et que

$$\dim(\text{Com}(A)) = n.$$

Par la question **1.2.** on a

$$\mathbb{K}[A] \subset \text{Com}(A).$$

De plus par la question **1.18.** on a

$$\dim(\mathbb{K}[A]) \geq n$$

et par la question **1.19.** comme il existe une application linéaire injective de $\text{Com}(A)$ vers un espace vectoriel de dimension n, on a

$$\dim(\text{Com}(A)) \leq n.$$

Par dimension, on a donc

$$\boxed{\text{Com}(A) = \mathbb{K}[A]}$$

et

$$\boxed{\dim(\text{Com}(A)) = n}.$$

1.21. Soit $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \text{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \text{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\dim\left(\text{Com}\left(A\right)\right) \geq \dim(\text{Com}(A_1)) + \dim(\text{Com}(A_2)).$$

Soient $B_1 \in \text{Com}(A_1)$ et $B_2 \in \text{Com}(A_2)$.
Alors avec $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ on a par produit matriciel par blocs

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1A_1 & 0 \\ 0 & B_2A_2 \end{pmatrix} = BA$$

et donc $B \in \mathrm{Com}(A)$.
Par conséquent

$$\left\{ \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, (B_1, B_2) \in \mathrm{Com}(A_1) \times \mathrm{Com}(A_2) \right\} \subset \mathrm{Com}(A).$$

L'espace de gauche étant isomorphe à $\mathrm{Com}(A_1) \times \mathrm{Com}(A_2)$, on a donc

$$\dim(\mathrm{Com}(A_1) \times \mathrm{Com}(A_2)) \leq \dim(\mathrm{Com}(A)).$$

c'est à dire

$$\dim(\mathrm{Com}(A_1)) + \dim(\mathrm{Com}(A_2)) \leq \dim(\mathrm{Com}(A)).$$

1.22. Déduire des questions précédentes que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\dim(\mathrm{Com}(A)) \geq n.$$

On procède par récurrence forte sur la dimension.
Pour $n \in \mathcal{N}^*$ on note $\mathcal{P}_n$ la proposition: «Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim(\mathrm{Com}(A)) \geq n$».

► **Initialisation**
Pour $n = 1$, comme $\mathbb{K}$ est commutatif, on a $\mathrm{Com}(A) = \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ et donc $\dim(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

► **Hérédité**
Soit $n \geq 2$, on suppose que pour tout $d \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathcal{P}_k$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Par la question **1.17.** il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ tels que

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

et A_1 cyclique.
Par la question **1.3.**,

$$\dim(\mathrm{Com}(A)) = \dim\left(\mathrm{Com}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Par la question **1.21.** on a alors

$$\dim(\mathrm{Com}(A)) \geq \dim(\mathrm{Com}(A_1)) + \dim(\mathrm{Com}(A_2)).$$

Or:
▷ Par la question **1.20.**,

$$\dim(\mathrm{Com}(A_1)) = d.$$

▷ Si $d = n$ alors $\dim(\mathrm{Com}(A)) = n$.
Sinon $n - d \in [\![1, n-1]\!]$, par hypothèse de récurrence forte ,

$$\dim(\mathrm{Com}(A_2)) \geq n - d.$$

D'où

$$\dim(\mathrm{Com}(A)) \geq d + n - d = n.$$

► **Conclusion**
Par récurrence forte, on a donc pour tout $n \in \mathcal{N}^*$, $\mathcal{P}_n$.
C'est à dire pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Com}(A)) \geq n}.$$

1.IV. Frobenius faible était en fait fort

On reprend dans cette partie les notations de la sous-partie 1.II.

1.23. Montrer qu'il existe un et unique polynôme unitaire π_u tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad (\forall y \in E, P(u)(y) = 0_E) \iff \pi_u | P.$$

On remarque tout d'abord que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\forall y \in E, P(u)(y) = 0_E$$

signifie tout simplement

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}}(\mathbb{K}^n).$$

Posons

$$\mathcal{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}}(E)\}.$$

Alors
- $\mathcal{I}_u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (noyau de $P \mapsto P(u)$) et en particulier est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$.
- pour tout $P \in \mathcal{I}_u$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}$$

  donc $QP \in \mathcal{I}_u$ et donc $\mathcal{I}_u$ est stable par produit externe.

Ainsi $\mathcal{I}_u$ est un $\boxed{\text{idéal}}$ de $\mathbb{K}[X]$.
De plus comme $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)) = n^2$, la famille $(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}, u, \dots, u^{n^2})$ est liée.
Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}.$$

En posant

$$P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$$

on a donc $P \in \mathcal{I}_u$ et $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Donc par le théorème de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ il $\boxed{\text{existe un et unique } \pi_u \text{ unitaire}}$ tel que

$$\boxed{\mathcal{I}_u = \pi_u \mathbb{K}[X]}.$$

1.24. En déduire qu'il existe une famille **finie** $(y_1, \dots, y_N)$ de vecteurs de E telle que

$$\{\pi_{u,y}, y \in E\} = \{\pi_{u,y_1}, \pi_{u,y_2}, \dots, \pi_{u,y_N}\}.$$

Indication: On pourra s'intéresser à la Décomposition en Facteurs Irréductibles de π_u.

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles unitaires et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que π_u admette la décomposition en facteurs irréductibles

$$\pi_u = \prod_{k=1}^{r} P_k^{m_k}.$$

Soit $y \in E$.

$$\pi_u(y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}(y) = 0_E$$

et donc

$$\pi_{u,y} | \pi_u.$$

Donc il existe $\ell_1, \dots, \ell_r \in [\![0, m_1]\!] \times \cdots \times [\![0, m_r]\!]$ tels que

$$\pi_{u,y} = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\ell_k}.$$

Ainsi

$$\{\pi_{u,y}, y \in E\} \subset \left\{ \prod_{k=1}^{r} P_k^{\ell_k}, (\ell_1, \dots, \ell_r) \in [\![0, m_1]\!] \times \cdots \times [\![0, m_r]\!] \right\}.$$

En particulier, comme l'ensemble de gauche est fini (de cardinal $\prod_{k=1}^{r}(m_k + 1)$)

$$\boxed{\{\pi_{u,y}, y \in E\} \text{ est fini}}.$$

En particulier il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $(y_1, \dots, y_N) \in E^N$ tels que

$$\boxed{\{\pi_{u,y}, y \in E\} = \{\pi_{u,y_1}, \pi_{u,y_2}, \dots, \pi_{u,y_N}\}}.$$

Dans les questions **1.25.** à **1.26.** on fixe $F_1, \dots, F_N$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = E \quad \text{et} \quad F_1 \not\subset \bigcup_{i=2}^{n} F_i.$$

1.25. Soit $y_1 \in F_1$ tel que $y_1 \notin \bigcup_{i=2}^n F_i$.
Soit $z \in E$.
Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists i_\lambda \in [\![1, N]\!], \lambda y_1 + z \in F_{i_\lambda}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, comme on a donc

$$\lambda y_1 + z \in E = \bigcup_{i \in I} F_i$$

on en déduit (définition de l'union)

$$\boxed{\exists i_\lambda \in [\![1, N]\!], \lambda y_1 + z \in F_{i_\lambda}}.$$

1.26. En déduire que $E = F_1$.
Indication: on pourra commencer par montrer que, avec les notations précédentes, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts tels que $F_{i_\lambda} = F_{i_\mu}$.

Soit $y_1 \in F_1$ tel que $y_1 \notin \bigcup_{i=2}^n F_i$ comme à la question précédente.
Soit $z \in E$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ fixons $i_\lambda \in [\![1, N]\!]$ comme à la question **1.25.**.
Comme $[\![1, N]\!]$ est fini et $\mathbb{K}$ est infini par principe des tiroirs (cas infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs) il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda \neq \mu$$

et $i_\lambda = i_\mu$, et en particulier

$$F_{i_\lambda} = F_{i_\mu}.$$

Par conséquent on a

$$\lambda y_1 + z \in F_{i_\lambda}$$
$$\mu y_1 + z \in F_{i_\lambda}$$

et comme F_{i_λ} est un sous-espace vectoriel (noyau d'un endomorphisme) on en déduit

$$(\lambda - \mu) y_1 \in F_{i_\lambda}$$

puis $(\lambda - \mu \neq 0)$

$$y_1 \in F_{i_\lambda}.$$

Or par définition $\forall i \neq 1, y_1 \notin F_i$.
Par conséquent

$$i_\lambda = 1.$$

Ainsi

$$\lambda y_1 + z \in F_1$$

et comme $y_1 \in F_1$ et F_1 un sous-espace vectoriel on en déduit

$$z \in F_1.$$

On a donc montré que pour tout $z \in E$, $z \in F_1$.
Donc

$$\boxed{E = F_1}.$$

1.27. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tous $F_1, \dots, F_N$ sous-espaces vectoriels de E on a

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i = E \implies \exists i \in [\![1, N]\!], F_i = E.$$

On procède par récurrence sur N.
Plus précisément pour $N \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{P}_N$ la proposition « pour tout N sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_N$ de E, si $\bigcup_{i=1}^{N} F_i = E$ alors il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $F_i = E$».

- **Initialisation**
  Pour $N = 1$, soit F_1 un sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 = E$.
  Avec $i = 1$ on a bien $F_1 = E$.
- **Hérédité**
  Soit $N \geq 2$ et supposons la propriété vraie au rang $N - 1$.
  Soient $F_1, \dots, F_N$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\bigcup_{i=1}^{N} F_i = E$.
  Par la question **1.26.** on a F_1 ou $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{N} F_i$. On procède par disjonction de cas:
  ▷ Si $F_1 = E$ alors avec $i = 1$ on a bien $F_1 = E$.
  ▷ Si $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{N} F_i$ alors on a $\bigcup_{i=2}^{N} F_i = E$ et donc par $\mathcal{P}_{N-1}$ il existe $i \in [\![2, N]\!]$ tel que $F_i = E$.
  Dans tous les cas il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $F_i = E$.
- **Conclusion**
  Par récurrence on a bien montré que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout N sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_N$ de E

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{N} F_i = E \Rightarrow \exists i \in [\![1, N]\!], F_i = E}.$$

1.28. Conclure qu'avec d fixé à la sous-partie 1.II (c'est à dire $d = \max(\{\deg(\pi_{u,y}, y \in E)\})$), on a

$$\deg(\pi_u) = d.$$

Soient $y_1, \dots, y_N$ comme à la question **1.24.**.
Posons pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,

$$F_i = \mathrm{Ker}(\pi_{u,y_i}(u)).$$

Soit $y \in E$.
Alors par définition $\pi_{u,y}(u)(y) = 0$ i.e $y \in \mathrm{Ker}(\pi_{u,y}(u))$.
Or il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $\pi_{u,y} = \pi_{u,y_i}$. Ainsi $y \in F_i$.
On a donc

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} F_i = E}.$$

Par la question **1.27.** il existe donc $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $F_i = E$, c'est à dire tel que

$$\pi_{u,y_i} = \pi_u.$$

En particulier

$$d_{y_i} = \deg(\pi_u)$$

et comme pour tout $y \in E$, $\pi_{u,y} | \pi_u$ on a

$$\forall y \in E, d_x \leq \deg(\pi_u)$$

on en déduit que (caractérisation du maximum)

$$\boxed{d = \deg(\pi_u)}.$$

Remarques:

- On remarque que le résultat sur le degré montrer en fait qu'avec ξ fixé à la sous-partie 1.II, on a

$$\deg(\pi_{u,\xi}) = d.$$

- On a utilisé dans la preuve le caractère infini (ou plutôt ayant strictement plus de N éléments) de $\mathbb{K}$.
  Il se trouve que le résultat final, l'existence d'un $\xi \in E$ tel que $\pi_{u,\xi} = \pi_u$ est en fait vrai sans cette hypothèse, en

utilisant le lemme des noyaux, cf votre cours de spé.

De même que précédemment pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe un et unique polynôme unitaire $\pi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = 0_n$ ssi $\pi_A \mid P$ (on ne demande pas de le redémontrer).

1.29. Démontrer le théorème de décomposition forte de Frobenius:
Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ il existe $d \in [\![1, n]\!]$, $A_1 \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ telles que

- On a la similitude
$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$
- et
$$A_1 \text{ est cyclique}$$
- et la divisibilité de polynômes minimaux
$$\pi_{A_2} \mid \pi_{A_1}.$$

On reprend exactement la construction de la question **1.29.**.
Les deux premiers points son alors vérifiés.
On remarque que comme pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(A_2) \end{pmatrix}$$
on a en particulier
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_A(A_1) & 0 \\ 0 & \pi_A(A_2) \end{pmatrix}$$
et donc
$$\pi_{A_1} \mid \pi_A$$
et
$$\pi_{A_2} \mid \pi_A.$$
Par écriture matricielle de la question précédente on a de plus
$$d = \deg(\pi_A).$$
Et comme A_1 est cyclique avec $\Xi \in \mathbb{K}^d$ tel que $(\Xi, A_1\Xi, \dots, A_1^{d-1}\Xi)$ est une base de $\mathbb{K}^d$ on a pour tout $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ non nul $P(A_1)\Xi \neq 0_{\mathbb{K}^d}$ et donc $P(A_1) \neq 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{K})}$.
D'où
$$d \leq \deg(\pi_{A_1})$$
Par conséquent, les polynômes étant unitaires,
$$\pi_A = \pi_{A_1}$$
et donc
$$\boxed{\pi_{A_2} \mid \pi_{A_1}}.$$

1.V. Lien avec le bicommutant

1.30. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ un endomorphisme cyclique.
Montrer que
$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A].$$

Par la question **1.2.** on a
$$\mathbb{K}[A] \subset \mathrm{Bicom}(A) \subset \mathrm{Com}(A)$$
et par la question **1.20.**, comme A est cyclique

$$\mathrm{Com}(A) = \mathbb{K}[A].$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A]}.$$

1.31. Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ ainsi que $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$. On suppose que

$$\pi_{u_2,y_2} \mid \pi_{u_1,y_1}.$$

Montrer que

$$\tau : \begin{array}{c} \mathbb{K}[u_1](y_1) \to \mathbb{K}[u_2](y_2) \\ P(u_1)(y_1) \mapsto P(u_2)(y_2) \end{array}$$

est bien définie, linéaire et surjective.

- **Bonne définition**
  Il faut montrer que $P(u_2)(y_2)$ ne dépend pas du choix de P mais seulement de $P(u_1)(y_1)$.
  Soit $z \in \mathbb{K}[u_1](y_1)$.
  Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

  $$z = P_1(u_1)(y_1) = P_2(u_1)(y_1).$$

  Alors

  $$(P_1 - P_2)(u_1)(y_1) = 0_E$$

  et donc

  $$\pi_{u_1,y_1} \mid (P_1 - P_2).$$

  Par conséquent

  $$\pi_{u_2,y_2} \mid (P_1 - P_2)$$

  c'est à dire

  $$P_1(u_2)(y2) = P_2(u_2)(y_2).$$

  D'où la $\boxed{\text{bonne définition}}$ de τ.
- **Linéarité**
  Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{K}[u](y)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
  Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $z_1 = P_1(u_1)(y_1)$ et $z_2 = P_2(u_1)(y_1)$.
  Alors on a

  $$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 P_1(u_1)(y_1) + \lambda_2 P_2(u_1)(y_1) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(u_1)(y_1)$$

  Par conséquent

  $$\tau(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(u_2)(y_2) = \lambda_1 P_1(u_2)(y_2) + \lambda_2 P_2(u_2)(y_2) = \lambda_1 \tau(z_1) + \lambda_2 \tau(z_2).$$

  Et donc τ est $\boxed{\text{linéaire}}$.
- **Surjectivité**
  Soit $z \in \mathbb{K}[u_2](y_2)$.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $z = P(u_2)(y_2)$.
  Alors $P(u_1)(y_1) \in \mathbb{K}[u_1](y_1)$ et on a $\tau(P(u_1)(y_1)) = P(u_2)(y_2) = z$.
  D'où la $\boxed{\text{surjectivité}}$ de τ.

1.32. Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, $A_1 \in \mathrm{M}_{d_1}(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathrm{M}_{d_2}(\mathbb{K})$ toutes les deux cycliques et telles que $\pi_{A_2} | \pi_{A_1}$.
Montrer qu'il existe $T \in \mathrm{M}_{d_2,d_1}(\mathbb{K})$ telle que

$$TA_1 = A_2T$$

et

$$\mathrm{rg}(T) = d_2.$$

Notons u_1 et u_2 les applications linéaires canoniquement associées à respectivement A_1 et A_2.
Comme A_1 et A_2 sont cycliques il existe $y_1 \in \mathbb{K}^{d_1}$ et $y_2 \in \mathbb{K}^{d_2}$ tels que $\mathbb{K}^{d_1} = \mathbb{K}[u_1](y_1)$ et $\mathbb{K}^{d_2} = \mathbb{K}[u_2](y_2)$.
De plus comme $\pi_{A_1} = \pi_{u_1}$ et $\pi_{A_2} = \pi_{u_2}$ on a $\pi_{u_2} | \pi_{u_1}$.
Notons alors τ l'application linéaire définie à la question **1.31.**.
Notons aussi T la matrice de τ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^{d_1}$ et $\mathbb{K}^{d_2}$.
Alors

- On a bien $T \in \mathrm{M}_{d_2,d_1}(\mathbb{K})$,
- par surjectivité de τ, $\mathrm{rg}(\tau) = d_2$ et donc $\boxed{\mathrm{rg}(T) = d_2.}$
- soit $z \in \mathbb{K}[u_1](y_1)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $z = P(u_1)(y_1)$.
  Alors

$$\begin{aligned}\tau(u_1(z)) &= \tau(u_1(P(u_1)(z))) \\ &= \tau((XP)(u_1)(y_1)) \\ &= (XP)(u_2)(y_2) \\ &= u_2(\tau(z))\end{aligned}$$

  c'est à dire $\tau \circ u_1 = u_2 \circ \tau$.
  Par écriture matricielle de cette relation on obtient donc bien

$$\boxed{TA_1 = A_2T}.$$

1.33. Conclure que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A].$$

Indication: vu qu'il s'agit de la dernière question d'un sujet assez long, on pourra se contenter d'une explication des grandes étapes de la preuve.

L'idée est de procéder de même qu'à la question **1.17.**. Les étapes sont les suivantes:

- Par récurrence, on peut montrer à partir de **1.29.** qu'il existe $A_1, A_2, \dots A_s$ des matrices cycliques telles que

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

  et la chaîne de divisibilité

$$\pi_{A_s} | \pi_{A_{s-1}} | \dots | \pi_{A_1}.$$

- On procède alors par blocs, afin de simplifier on traite dans le cas $s = 2$ (le cas s quelconque étant similaire). Comme on a l'inclusion et les dimensions étant invariantes de similitude on se ramène donc au cas

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

  où A_1 et A_2 sont cycliques et $\pi_{A_2} | \pi_{A_1}$.
- On fixe dans la suite $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Bicom}(A)$.
  Il suffit de montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $C = P(A)$ pour conclure.
- Comme

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0_{n-d} \end{pmatrix} \in \mathrm{Com}(A)$$

  on en déduit par la partie 1.I que

$$C_{12} = 0_{d,n-d}$$
$$C_{21} = 0_{n-d,d}.$$

- Soient $B_1 \in \mathrm{Com}(A_1)$ et $B_2 \in \mathrm{Com}(A_2)$.
  Comme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Com}(A)$$

  on en déduit (produit diagonal par bloc) $B_1C_1 = C_1B_1$ et $B_2C_2 = C_2B_2$.
  Par conséquent

$$C_{11} \in \mathrm{Bicom}(A_1) C_{22} \quad \in \mathrm{Bicom}(A_2).$$

Par la question **1.30.**, comme A_1 et A_2 sont cycliques on en déduit qu'il existe $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{K}[X]$

$$C_{11} = P_1(A_1)$$
$$C_{22} = P_2(A_2).$$

- Il reste à montrer que que l'on peut trouver un polynôme commun pour conclure.
  Comme $\pi_{A_2} \mid \pi_{A_1}$, on peut par la question **1.32.** fixer $T \in \mathrm{M}_{d_2,d_1}(\mathbb{K})$ tel que

  $$TA_1 = A_2T$$

  et

  $$\mathrm{rg}(T) = d_2.$$

  Alors on a

  $$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_2T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ TA_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

  c'est à dire

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Com}(A).$$

  Par conséquent on a

  $$\begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_2(A_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_2(A_2) \end{pmatrix}$$

  c'est à dire

  $$P_2(A_2)T = TP_1(A_1).$$

- Comme $TA_1 = A_2T$, par récurrence on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, ${TA_1}^k = {A_2}^k T$ et donc par linéarité

  $$TP_1(A_1) = P_1(A_2)T.$$

  D'où

  $$P_2(A_2)T = P_1(A_2)T.$$

  Or $\mathrm{rg}(T) = d_2$ et donc $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{K}^{d_2}$.
  Par conséquent

  $$P_2(A_2) = P_1(A_2).$$

- On a donc

  $$C = \begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_1(A_2) \end{pmatrix} = P_1(A).$$

- On a donc bien montré que

  $$\boxed{\mathrm{Bicom}(A) = \mathbb{K}[A]}.$$