Bases de Darboux

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet est adapté d'un début d'épreuve X-ENS MP 2017. On y étudie les formes bilinéaires antisymétriques (« formes symplectiques ») sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et l'on démontre l'existence de bases de Darboux. Les prérequis relèvent de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, formes linéaires et dualité, formes bilinéaires.

1. Autour des formes symplectiques: existence de base de Darboux

adapté d'un début de X-ENS MP 2017

Définitions et notations

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
- On rappelle que l'on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.
- Soit $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in E$ on note
  $$\omega(x, \cdot) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \omega(x, y) \end{array}$$
  et de même pour tout $y \in E$ on définit de manière similaire $\omega(\cdot, y)$. On dit que ω est:
  ▷ **bilinéaire** ssi pour tout $x \in E$, $\omega(x, \cdot)$ est linéaire et pour tout $y \in E$, $\omega(\cdot, y)$ est linéaire
  ▷ **antisymétrique** ssi pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$.
  On note $A(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires et antisymétriques sur E.
- Soit $\omega \in A(E)$.
  On note ϕ_ω l'application linéaire définie par
  $$\phi_\omega : \begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto \omega(x, \cdot) \end{array}$$
  On dit alors que ω est **symplectique** sur E ssi ϕ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
  On note $\mathrm{Sp}(E)$ l'ensemble des formes symplectiques sur E.

1.I. Matrice d'une forme bilinéaire antisymétrique dans une base

Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1.1. Montrer que $\dim(E^*) = n$.

1.2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\omega(x, x) = 0$.

1.3. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle pour tout $(x, y) \in E^2$, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ on a
$$\omega(x, y) = X^\top M Y.$$

On notera alors dans la suite du sujet
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$$

1.4. Montrer que $M \in A_n(\mathbb{R})$.

1.5. En déduire $\dim(A(E))$.

1.II. Matrice d'une forme symplectique: le début

1.6. Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i)
$$\omega \in \mathrm{Sp}(E).$$

(ii)
$$\forall x \in E \backslash \{0_E\}, \exists y \in E, \omega(x, y) \neq 0.$$

(iii)
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

On admet que l'existence de matrices antisymétriques inversibles permet de démontrer que n est nécessairement pair (cf par exemple le chapitre déterminant).
Dans la suite on suppose donc que n est un entier pair, et on note $J_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par blocs:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix}.$$

1.7. Soit $\omega \in A(E)$.
Montrer que **si** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$ **alors** ω est symplectique.

1.III. Matrice d'une forme symplectique: existence de bases de Darboux

On cherche désormais à montrer la réciproque de la question **1.7.**. On fixe donc ω une forme symplectique sur E et on cherche à montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.
1.8. Traiter le cas où $\dim(E) = 2$.
On fixe désormais F un sous-espace vectoriel de E.
On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\psi_F : \begin{array}{c} E \to F^* \\ x \mapsto (\phi_\omega(x))_{|F} \end{array}.$$

1.9. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{c} E^* \to F^* \\ \ell \mapsto \ell_{|F} \end{array}$$

est surjective.
1.10. Montrer que

$$\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \;\Leftrightarrow\; F \cap F^\omega = \{0_E\}.$$

1.11. Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi_F)$ et $\mathrm{Im}(\psi_F)$.
1.12. Montrer que

$$\dim(F) + \dim(F^\omega) = n.$$

1.13. En déduire que

$$\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \;\Leftrightarrow\; F \oplus F^\omega = E.$$

1.14. On suppose que $\omega_{|F\times F}$ est une forme symplectique sur F.
Montrer que $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique sur F^ω.
1.15. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}.$$

1.16. Conclure.