En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet est adapté d'un début d'épreuve X-ENS MP 2017. On y étudie les formes bilinéaires antisymétriques (« formes symplectiques ») sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et l'on démontre l'existence de bases de Darboux. Les prérequis relèvent de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, formes linéaires et dualité, formes bilinéaires.

1. Autour des formes symplectiques: existence de base de Darboux

adapté d'un début de X-ENS MP 2017

Définitions et notations

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
- On rappelle que l'on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.
- Soit $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in E$ on note
  $$\omega(x, \cdot) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \omega(x, y) \end{array}$$
  et de même pour tout $y \in E$ on définit de manière similaire $\omega(\cdot, y)$. On dit que ω est:
  ▷ **bilinéaire** ssi pour tout $x \in E$, $\omega(x, \cdot)$ est linéaire et pour tout $y \in E$, $\omega(\cdot, y)$ est linéaire
  ▷ **antisymétrique** ssi pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$.
  On note $A(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires et antisymétriques sur E.
- Soit $\omega \in A(E)$.
  On note ϕ_ω l'application linéaire définie par
  $$\phi_\omega : \begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto \omega(x, \cdot) \end{array}$$
  On dit alors que ω est **symplectique** sur E ssi ϕ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
  On note $\mathrm{Sp}(E)$ l'ensemble des formes symplectiques sur E.

1.I. Matrice d'une forme bilinéaire antisymétrique dans une base

Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1.1. Montrer que $\dim(E^*) = n$.

On a $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n \times 1$ et donc $\boxed{\dim(E^*) = n}$.

1.2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\omega(x, x) = 0$.

Soit $x \in E$. Par antisymétrie de ω on a
$$\omega(x, x) = -\omega(x, x)$$
et donc (comme $2 \neq 0$)
$$\boxed{\omega(x, x) = 0}.$$

1.3. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle pour tout $(x, y) \in E^2$, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ on a
$$\omega(x, y) = X^\top M Y.$$

On procède par analyse-synthèse.
- **Analyse**: supposons qu'une telle matrice M existe.
  Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,
  En particulier pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ on a comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = E_i$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j) = E_j$
  $$(M)_{ij} = E_i^\top M E_j = \omega(e_i, e_j)$$
  d'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

- **Synthèse**: posons
$$M = (\omega(e_i, e_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}.$$
Soit $(x, y) \in E^2$ et posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
Alors par bilinéarité de ω
$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \omega(e_i, e_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i (M_{ij}) y_j\\ &= X^\top M Y\end{aligned}$$
d'où $\boxed{\text{l'existence}}$.

On notera alors dans la suite du sujet
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$$

1.4. Montrer que $M \in A_n(\mathbb{R})$.

On a vu à la question précédente que
$$(M)_{ij} = E_i^\top M E_j = \omega(e_i, e_j)$$
pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par antisymétrie de ω on a
$$\omega(e_i, e_j) = -\omega(e_j, e_i)$$
c'est à dire
$$(M)_{ij} = -(M)_{ji}.$$
Donc $M^\top = -M$ i.e $\boxed{M \in A_n(\mathbb{R})}$.

1.5. En déduire $\dim(A(E))$.

L'application
$$\Xi : \begin{array}{c} A(E) \to A_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \end{array}$$
est bien définie par la question **1.4.**.
Elle est linéaire car pour $(\omega_1, \omega_2) \in (A(E))^2$, $(\lambda_1, \lambda_2)^2$ on a
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)(e_i, e_j) = \lambda_1\omega_1(e_i, e_j) + \lambda_2\omega_2(e_i, e_j).$$
De plus par **1.3.** elle est injective.
Enfin pour tout $M \in A_n(\mathbb{R})$ en posant
$$\omega : \begin{array}{c} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top M \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \end{array}$$
on a
- ω est bilinéaire par linéarité de $z \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(z)$ et par bilinéarité du produit matriciel
- ω est antisymétrique car pour tout $(x, y) \in E^2$ (un scalaire étant égal à sa transposée)
$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top M \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)\\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top M \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)\right)^\top\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)^\top M^\top \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\\ &= -\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)^\top M \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\\ &= -\omega(y, x).\end{aligned}$$

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = M$ car pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\omega(e_i, e_j) = E_i^\top M E_j = (M)_{ij}$.

Donc l'application Ξ est surjective.
Par conséquence Ξ est un isomorphisme entre $A(E)$ et $A_n(\mathbb{R})$.
En particulier $\dim(A(E)) = \dim(A_n(\mathbb{R}))$ c'est à dire

$$\boxed{\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}}.$$

1.II. Matrice d'une forme symplectique: le début

1.6. Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i)
$$\omega \in \mathrm{Sp}(E).$$

(ii)
$$\forall x \in E\backslash\{0_E\}, \exists y \in E, \omega(x,y) \neq 0.$$

(iii)
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

- $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Supposons ω symplectique.
Soit $x \in E\backslash\{0_E\}$. Comme ϕ_ω est un isomorphisme elle est en particulier injective d'où $\phi_\omega(x) \neq 0_{E^*}$. Donc il existe $y \in E$ tel que $(\phi_\omega(x))(y) = \omega(x,y) \neq 0$.
On a donc bien montré $\boxed{\forall x \in E\backslash\{0_E\}, \exists y \in E, \omega(x,y) \neq 0}$.
- $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Supposons $\forall x \in E\backslash\{0_E\}, \exists y \in E, \omega(x,y) \neq 0$.
Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.
Alors $\forall X \in \mathbb{R}^n\backslash\{0_{\mathbb{R}^n}\}, \exists Y \in \mathbb{R}^n, X^\top M Y \neq 0$.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(M)$. On $MX = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $X^\top M^\top = -X^\top M = 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})}$ et donc $\forall Y \in \mathbb{R}^n, X^\top M Y = 0$. D'où $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On en déduit $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donc $\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.
- $\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Supposons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ inversible.
On a $\phi_\omega \in \mathcal{L}(E, E^*)$ et $\dim(E) = \dim(E^*)$ pour montrer que ϕ_ω est un isomorphisme il suffit par dimension de montrer qu'elle est injective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\phi_\omega)$ c'est à dire $x \in E$ tel que $\forall y \in E$, $\omega(x,y) = 0$.
En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ on a alors $\forall Y \in \mathbb{R}^n, X^\top M Y = 0$ c'est à dire par antisymétrie de M, $\forall Y \in \mathbb{R}^n, Y^\top M X = -0$.
On en déduit donc (par exemple avec $Y = MX$ ou bien avec $Y = E_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$) que $MX = 0_{\mathbb{R}^n}$. Comme $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on a $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ i.e $x = 0_E$.
Donc
$$\mathrm{Ker}(\phi_\omega) = \{0_E\}.$$
Par dimension on en déduit que $\boxed{\phi_\omega \text{ est un isomorphisme}}$.

On admet que l'existence de matrices antisymétriques inversibles permet de démontrer que n est nécessairement pair (cf par exemple le chapitre déterminant).
Dans la suite on suppose donc que n est un entier pair, et on note $J_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par blocs:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix}.$$

1.7. Soit $\omega \in A(E)$.
Montrer que **si** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$ **alors** ω est symplectique.

On a par produit par blocs

$$(J_n)^2 = \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{n/2} & 0_{n/2} \\ 0_{n/2} & -I_{n/2} \end{pmatrix} = -I_n$$

et donc J_n est inversible d'inverse $-J_n$.
Supposons qu'il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.
Comme $J_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par la question précédente (plus précisément (iii) $\Rightarrow$ (i)) on en déduit que $\boxed{\omega \text{ est symplectique}}$.

1.III. Matrice d'une forme symplectique: existence de bases de Darboux

On cherche désormais à montrer la réciproque de la question **1.7.**. On fixe donc ω une forme symplectique sur E et on cherche à montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.

1.8. Traiter le cas où $\dim(E) = 2$.

Soit (e_1, e_2) une base de E (existe car $\dim(E) = 2$). Comme $\omega \in A(E)$, il existe (par la question **1.3.**)$\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

et comme $\omega \in \mathrm{Sp}(E)$, $\alpha \neq 0$.
Posons $(f_1, f_2) = \left(-\frac{1}{\alpha}e_1, e_2\right)$ qui est une base de E (obtenue par dilatation). Alors $\omega(f_1, f_2) = -\frac{1}{\alpha}\omega(e_1, e_2) = -1$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2}.$$

On fixe désormais F un sous-espace vectoriel de E.
On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\psi_F : \begin{array}{l} E \to F^* \\ x \mapsto (\phi_\omega(x))_{|F} \end{array}.$$

1.9. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{l} E^* \to F^* \\ \ell \mapsto \ell_{|F} \end{array}$$

est surjective.

Soit S un supplémentaire de F.
Soit $\gamma \in F^*$.
Comme $F \oplus S = E$ on peut définir une (et unique) forme linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \ell_{|F} &= \gamma \\ \ell_{|S} &= 0_{S \to \mathbb{R}} \end{aligned}$$

et on a bien $\ell \in E^*$ et $\ell_{|F} = \gamma$.
Donc l'application est $\boxed{\text{surjective}}$.

1.10. Montrer que

$$\omega_{|F \times F} \in \mathrm{Sp}(F) \ \Leftrightarrow \ F \cap F^\omega = \{0_E\}.$$

On a
- $\omega_{|F\times F}$ est bilinéaire comme restriction d'une forme bilinéaire
- $\omega_{|F\times F}$ antisymétrique car pour tout $(x, y) \in F^2$, $\omega_{|F\times F}(x, y) = \omega(x, y) = -\omega(y, x) = -\omega_{|F\times F}(y, x)$.

et donc $\omega_{|F\times F} \in A(F)$.
Par la question **1.6.** (plus précisément (i) $\Leftrightarrow$ (ii)) on a donc

$$\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \Leftrightarrow \forall x \in F \backslash \{0_F\} \exists y \in F, \omega(x, y) \neq 0$$

ce qui peut se réécrire

$$\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \Leftrightarrow (\forall x \in F, (\forall y \in F, \omega(x, y) = 0) \Rightarrow (x = 0_F)).$$

or à x fixé $\forall y \in F, \omega(x, y) = 0$ signifie exactement $x \in F^\omega$ et donc la proposition précédente se réécrit (comme $0_E \in F \cap F^\omega$)

$$\boxed{\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \Leftrightarrow F \cap F^\omega = \{0_E\}}.$$

1.11. Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi_F)$ et $\mathrm{Im}(\psi_F)$.

- Soit $x \in E$. On a
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(\psi_F) &\Leftrightarrow \phi_\omega(x)_{|F} = 0_{F^*} \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F, (\phi_\omega(x))(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F, \omega(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in F^\omega \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\mathrm{Ker}(\psi_F) = F^\omega}.$$
- On a ψ_F est la composée de ϕ_ω qui est bijective (car $\omega \in \mathrm{Sp}(E)$), et de l'application de restriction de la question **1.9.** qui est surjective (déjà démontré). Donc ψ_F est surjective et
$$\boxed{\mathrm{Im}(\psi_F) = F^*}.$$

1.12. Montrer que
$$\dim(F) + \dim(F^\omega) = n.$$

Par le théorème du rang appliqué à ψ_F on a
$$\dim(\mathrm{Im}(\psi_F)) + \dim(\mathrm{Ker}(\psi_F)) = \dim(E)$$
c'est à dire par la question précédente
$$\dim(F^*) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$$
ou encore ($\dim(F^*) = \dim(F)$)
$$\boxed{\dim(F) + \dim(F^\omega) = n}.$$

1.13. En déduire que
$$\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \;\Leftrightarrow\; F \oplus F^\omega = E.$$

Comme $\dim(F) + \dim(F^\omega) = n$ et que $F + F^\omega \subset E$ on a par dimension, $F \oplus F^\omega = E$ ssi $F \cap F^\omega = \{0_E\}$ (en effet si $F \cap F^\omega = \{0_E\}$ alors $\dim(F \oplus F^\omega) = \dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$ d'où par dimension $F \oplus F^\omega = E$).
On a donc
$$F \cap F^\omega = \{0_E\} \Leftrightarrow F \oplus F^\omega = E$$
et donc en utilisant la question **1.10.** on en déduit donc
$$\boxed{\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F) \;\Leftrightarrow\; F \oplus F^\omega = E}.$$

1.14. On suppose que $\omega_{|F\times F}$ est une forme symplectique sur F.
Montrer que $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique sur F^ω.

Par définition de F^ω et antisymétrie de ω, on a
$$\forall y \in F, \forall x \in F^\omega, \omega(y,x) = 0$$
et donc
$$\forall y \in F, y \in (F^\omega)^\omega$$
i.e
$$\boxed{F \subset (F^\omega)^\omega}.$$
de plus par la question **1.12.** on a
$$\begin{aligned} \dim(F) + \dim(F^\omega) &= n \\ \dim(F^\omega) + \dim((F^\omega)^\omega) &= n \end{aligned}$$
et donc
$$\dim(F) = \dim((F^\omega)^\omega)$$
et par dimension on en déduit donc
$$\boxed{F = (F^\omega)^\omega}.$$
En particulier $F \oplus F^\omega = (F^\omega)^\omega \oplus (F^\omega)$ et donc par **1.13.**
$$\boxed{\omega_{|F\times F} \in Sp(F) \Leftrightarrow \omega_{|F^\omega \times F^\omega} \in \mathrm{Sp}(F^\omega)}$$

1.15. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{H}_k$ la proposition

«Pour tout ev E de dimension $2k$, pour tout $\omega \in \mathrm{Sp}(E)$ il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}$»

et procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation**: il s'agit de la question **1.8.**.
- **Hérédité**: soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{H}_k$. Soit E un ev de dimension $2(k+1)$ et $\omega \in \mathrm{Sp}(E)$.
  Soit e_1 un vecteur non nul de E.
  Comme ω est symplectique il existe $e_2 \in E$ tel que $\omega(e_1, e_2) \neq 0$.
  Alors (e_1, e_2) est libre car par l'absurde si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e_2 = \lambda e_1$, on a $\omega(e_1, e_2) = \lambda\omega(e_1, e_1) = 0$.
  Posons $\alpha = \omega(e_1, e_2) \neq 0$ puis $(f_1, f_2) = \left(-\frac{1}{\alpha}e_1, e_2\right)$.
  On a alors
  ▷ La famille (f_1, f_2) est libre (dilatation d'une famille libre)
  ▷ $\omega(f_1, f_1) = 0$, $\omega(f_1, f_2) = -1$, $\omega(f_2, f_1) = 1$, $\omega(f_2, f_2) = 0$.
  Posons $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (de dimension 2).
  On a alors
  $$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}(\omega_{|F\times F}) = J_2.$$
  En particulier (question **1.7.**) $\omega_{|F\times F} \in \mathrm{Sp}(F)$.
  Donc par la question **1.14.**, $\omega_{|F^\omega \times F^\omega} \in \mathrm{Sp}(F^\omega)$.
  Comme par la question **1.12.**, $\dim(F^\omega) = 2(k+1) - \dim(F) = 2k$, par $\mathcal{H}_k$ appliquée à F^ω et $\omega_{|F^\omega\times F^\omega}$, il existe $(f_3, \ldots, f_{2k+2})$ base de F^ω telle que
  $$Mat_{(f_3,\ldots,f_{2k+2})}(\omega_{|F^\omega\times F^\omega}) = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}.$$
  Comme F et F^ω sont supplémentaires, $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{2(k+1)})$ et une base de E et on a de plus par définition de ces bases
  $$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_{2(k+1)})}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & & A & \\ & J_2 & \ddots & \vdots \\ A' & \ddots & \ddots & 0_2 \\ & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}$$
  Où $A = (\omega(f_i, f_j))_{\substack{i\in\{1,2\} \\ j\in\{3,2(k+1)\}}}$ et $A' = (\omega(f_i, f_j))_{\substack{i\in\{3,2(k+1)\} \\ j\in\{1,2\}}} = -A^\top$.
  Or pour tout $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 2(k+1)\}$ on a $f_i \in F$ et $f_j \in F^\omega$ d'où $\omega(f_i, f_j) = 0$.
  On en déduit donc
  $$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_{2(k+1)})}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}$$
- **Conclusion**: la proposition est initialisée et héréditaire, par récurrence on a donc
  Pour tout E de dimension paire, pour tout $\omega \in \mathrm{Sp}(E)$ il existe une telle base.

1.16. Conclure.

Soit $\widetilde{\mathcal{B}} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \vdots & 0_2 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_3, \dots, e_{n/2}, e_{n/2+1}, \dots, e_4, e_2)$ qui est bien une base de E (permutation d'une base). Alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n}.$$