Automorphismes de S_n

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

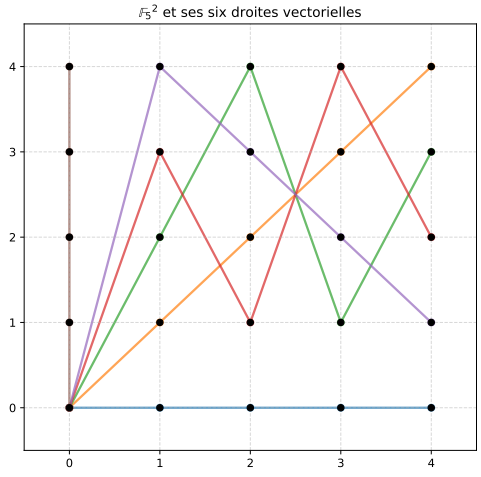
Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif de ce DM est de s'entraîner sur un exercice d'oral plus difficile.
N'hésitez pas à le travailler en groupe et à rendre une seule copie par groupe.

On rappelle les notations suivantes:

- S_n est le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.
- Un **automorphisme** de S_n est un morphisme de groupe de S_n vers S_n bijectif.
  On note $\mathrm{Aut}(S_n)$ l'ensemble des automorphismes de S_n.
- Un **automorphisme intérieur** de S_n est un automorphisme de la forme $\Phi_\rho : \begin{array}{l} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \rho\sigma\rho^{-1} \end{array}$ où $\rho \in S_n$.
  On note $\mathrm{Int}(S_n)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de S_n.



1. Énoncé (Oral ENS)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{6\}$. Montrer que $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Int}(S_n)$.

Indications

Il y a de nombreuses façons de procéder. Voici quelques indications possibles:

- Commencer par traiter les exercices classiques dans la feuille de TD, notamment concernant les générateurs de S_n (Exercice 2), le calcul des classes de conjugaison (Exercice 3) et de l'ordre (Exercice 6).
- Montrer que l'image de l'ensemble des transpositions est l'ensemble des transpositions.
  - ▷ L'image d'un élément d'ordre 2 est d'ordre 2.
  - ▷ Les classes de conjugaison sont envoyées sur des classes de conjugaison.
  - ▷ Dénombrer le nombre d'éléments de la classe de conjugaison constituée des permutations contenant k transpositions dans leurs DPCSD.
  - ▷ À un moment remarquer que le cas particulier $n = 6$ apparaît car si $n \neq 6$ alors l'équation

$$\binom{n}{2} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}}{k!}$$

    d'inconnue k n'a pas de solution autre que $k = 1$.
- Montrer que si automorphisme envoie toute transposition sur une transposition alors il est intérieur. En effet, si c'est le cas
  - ▷ Constater que l'image de deux transpositions qui ne commutent pas ne commutent pas.
  - ▷ Traiter le cas particulier de (1 2) et (1 3).
  - ▷ Pour tout i, l'image de (1 i) est de la forme (a_1 a_i) (par exemple par récurrence).
  - ▷ Conclure.

---

2. Facultatif: isomorphisme exceptionnel et le cas $n = 6$

Attention, cette partie **facultative** est plus difficile que la première partie.

2.I. Un zeste de géométrie projective

On note dans la suite $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On constate notamment qu'il s'agit d'un corps à 5 éléments.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ l'ensemble des droites vectorielles du plan $\mathbb{F}_5^2$,
- $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ l'ensemble des matrices inversibles modulo la multiplication par une homothétie c'est à dire le quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ par la relation d'équivalence pour toutes matrices $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$

$$M_1 \sim M_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{F}_5^* : M_1 = \lambda M_2.$$

2.1. Montrer que

$$\left|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)\right| = 6.$$

2.2. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est un groupe (méditer sur l'opération "naturelle" sur les classes d'équivalence).

2.3. Déterminer

$$\left|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)\right|.$$

2.4. Exhiber un morphisme injectif

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \to S_6.$$

2.5. Conclure qu'il existe H un sous-groupe de S_6 tel que $H \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ tel que
- H est un sous-groupe d'indice 6 c'est à dire

$$|H| \times 6 = |S_6|.$$

- H agit transitivement sur $[\![1, 6]\!]$ c'est à dire

$$\forall i, j \in [\![1, 6]\!], \exists \sigma \in H : \sigma(i) = j.$$

2.II. Automorphismes intérieurs et stabilisateurs d'un point

Soit $n \geq 5$.
On **admet** que le noyau de tout morphisme de groupe de S_n vers un autre groupe est soit $\{\mathrm{Id}\}$, soit S_n, soit A_n.
(Il s'agit d'une conséquence de la *simplicité* de A_n pour $n \geq 5$, cf n'importe quel livre de théorie des groupes).
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note $\mathrm{Stab}(i)$ le stabilisateur de i dans S_n c'est à dire

$$\mathrm{Stab}(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.$$

2.6. Soit $\rho \in S_n$ et $\Phi_\rho : \begin{array}{c} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \rho\sigma\rho^{-1} \end{array}$ l'automorphisme intérieur associé. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\Phi_\rho(\mathrm{Stab}(i)) = \mathrm{Stab}(\rho(i)).$$

2.7. Soit H un sous-groupe de S_n.
Montrer que l'application (action de S_n sur les classes à gauche)

$$\begin{array}{c} S_n \to S\left(S_n/H\right) \\ \sigma \mapsto \left\{ \begin{array}{c} S_n/H \to S_n/H \\ gH \mapsto \sigma g H \end{array} \right\} \end{array}$$

est bien définie et un morphisme de groupes.

2.8. En déduire que si H est un sous-groupe d'indice n de S_n, c'est à dire $|H| \times n = |S_n|$, alors il existe $\Phi \in \mathrm{Aut}(S_n)$ tel que

$$\Phi(H) = \mathrm{Stab}(1).$$

2.9. Conclure que **si** $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Int}(S_n)$ **alors** pour tout sous-groupe H d'indice n de S_n, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $H = \mathrm{Stab}(i)$.

2.III. La conclusion

2.10. Montrer que

$$\mathrm{Aut}(S_6) \neq \mathrm{Int}(S_6).$$