Algèbre de Boole

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

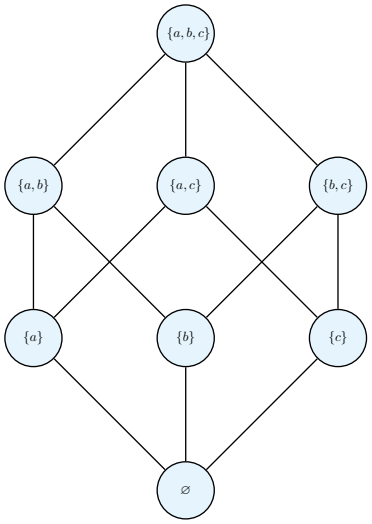
Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce devoir vous propose une première introduction à un type de problèmes dont vous n'avez pas l'habitude au lycée: les problèmes **introduisant une nouvelle notion** et vous faisant **manipuler** la définition de cette notion.

D'un point de vue mathématique on s'intéresse aux *algèbres de Boole* sur un ensemble. Il s'agit des ensembles d'ensembles stables par union de deux éléments et par complémentaires (et non vides).

- La première partie traite de quelques exemples particuliers.
- La seconde partie démontre quelques propriétés des algèbres de Boole.
- La troisième partie traite de *morphismes* de ces structures.
- La quatrième partie caractérise les algèbres de Boole finies.
- La dernière partie est totalement facultative.



Cube de Hasse représentant le treillis des parties d'un ensemble

---

Soit E un ensemble.
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de Boole*[1] (sur E) ssi:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) $\forall X \in \mathcal{A}, \quad E \backslash X \in \mathcal{A}$,
(iii) $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \quad X \cup Y \in \mathcal{A}$.

---

1. Quelques cas particuliers

1.1. Dans cette question on considère le cas particulier $E = \mathbb{N}$.

1.1.1. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des entiers impairs. Montrer que

$$\{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$$

est une algèbre de Boole.

1.1.2. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$ on note $\mathbb{T}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv k[3]\}$. L'ensemble de parties

$$\{\emptyset, \mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{N}\}$$

est-il une algèbre de Boole ?

1.1.3. Montrer

$$\{X \subset \mathbb{N} \mid (X \text{ est finie}) \text{ ou } (\mathbb{N} \backslash X \text{ est finie})\}$$

est une algèbre de Boole.

1.2. Soit E un ensemble (non vide quelconque).
Montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\{\emptyset, E\}$ sont des algèbres de Boole sur E. Commenter.

1.3. Soit E un ensemble (non vide quelconque) et $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E. Montrer que

$$\left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, \ J \in \mathcal{P}(I) \right\}$$

est une algèbre de Boole, appelée *algèbre associée à la partition*.

[1] ou plus précisément une *algèbre de Boole de parties*

2. Propriétés en vrac

Soit E un ensemble non vide.

2.I. Stabilité par union et intersection finie

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole.
2.1. Montrer que $\emptyset \in \mathcal{A}$ et que $E \in \mathcal{A}$.
2.2. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par intersection, c'est à dire que

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{A}^2, \quad X \cap Y \in \mathcal{A}.$$

2.3. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union finie et intersection finie c'est à dire:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}.$$

2.II. Algèbre de Boole induite

2.4. Soient $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(E)$ deux algèbres de Boole.
Montrer que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole.
A-t-on nécessairement $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole ?
2.5. Soit I un ensemble d'indice et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres de Boole indexée par I. Montrer que

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

est une algèbre de Boole.
2.6. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $\mathfrak{B}_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des algèbres de Boole contenant $\mathcal{G}$, c'est à dire

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E) \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A} \text{ est une algèbre de Boole}\}.$$

Montrer que

$$\mathrm{Bool}(\mathcal{G}) = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathfrak{B}_{\mathcal{G}}} \mathcal{A}$$

est une algèbre de Boole, appelée *algèbre de Boole engendrée* par $\mathcal{G}$.
2.7. Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathrm{Bool}(\mathcal{G})$ et que pour tout algèbre de Boole $\mathcal{B}$ on a $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ ssi $\mathrm{Bool}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}$.

3. Morphismes d'algèbres de Boole

Soient E et F deux ensembles non vides, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole sur E et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une algèbre de Boole sur F.
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. On dit que f est un *morphisme (d'algèbres de Boole)* ssi:
(i) $\forall X \in \mathcal{A}, \quad f(E\backslash X) = F\backslash f(X)$.
(ii) $\forall (X,Y) \in \mathcal{A}^2, \quad f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$.
Dans la suite on considère f un tel morphisme.
3.1. Montrer que $f(E) = F$ et $f(\emptyset) = \emptyset$.
3.2. Montrer que $\forall (X,Y) \in \mathcal{A}^2, \quad f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$.
On note $\mathcal{I}_f$ l'*image* de f c'est à dire

$$\mathcal{I}_f = \{Y \in \mathcal{B} \mid \exists X \in \mathcal{A}, Y = f(X)\}$$

et on appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathcal{K}_f = \{X \in \mathcal{A} \mid f(X) = \emptyset\}.$$

3.3. Montrer que $\mathcal{I}_f$ est une algèbre de Boole.
3.4. Montrer que
- $\emptyset \in \mathcal{K}_f$,
- $\forall (X_1,X_2) \in \mathcal{K}_f^2$, $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{K}_f$,
- $\forall X \in \mathcal{K}_f, \forall T \in \mathcal{A}, X \cap T \in \mathcal{K}_f$.

3.5. Montrer que

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \mathcal{I}_f = \mathcal{B}$$

et

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathcal{K}_f = \{\emptyset\}.$$

Soit G un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(G)$ une algèbre de Boole sur G et $g \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ un morphisme d'algèbres de Boole.
3.6. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est un morphisme d'algèbres de Boole.
3.7. Quelles relations d'inclusions peut-on écrire (dans tous les cas) entre $\mathcal{I}_{g\circ f}$, $\mathcal{I}_f$, $\mathcal{I}_g$, $\mathcal{K}_{g\circ f}$, $\mathcal{K}_f$,$\mathcal{K}_g$?

4. Atomes et algèbres de Boole finies

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole.
Pour tout $x \in E$, on note $\mathcal{A}_x$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ contenant x, c'est à dire

$$\mathcal{A}_x = \{X \in \mathcal{A} \mid x \in X\}$$

et $\mu(x)$ l'ensemble appelé *atome* de $\mathcal{A}$ engendré par x,

$$\mu(x) = \{y \in E \mid \mathcal{A}_y = \mathcal{A}_x\}.$$

4.1. Montrer que

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \mu(x_1) \cap \mu(x_2) \neq \emptyset \Rightarrow \mu(x_1) = \mu(x_2).$$

4.2. Montrer que la famille $\{\mu(x)\}_{x\in E}$ est une partition de E.
Remarque: on dit qu'un ensemble M est une partition ssi la famille associée $(m)_{m\in M}$ est une partition.
4.3. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{A}$,

$$X = \bigcup_{x\in X} \mu(x).$$

4.4. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\mu(x) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}_x} X.$$

On suppose désormais que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole **finie**, c'est à dire constituée d'un nombre fini d'éléments.
4.5. Montrer que pour tout $x \in E$, $\mu(x) \in \mathcal{A}$.
4.6. En déduire que le nombre d'atomes est fini, puis que tout élément de $\mathcal{A}$ est une union finie d'atomes.
4.7. Démontrer le résultat suivant:

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole **finie** sur E, alors il existe une partition finie $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E telle que

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i\in J} A_i, J \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \right\}.$$

C'est à dire que toute algèbre de Boole finie est une algèbre associée à une partition.

5. Bonus: le cas non fini

(Pour les questions marquées ⏩ on pourra se contenter d'une idée (ou schéma) peu rédigée.)
5.1. ⏩ Une algèbre de Boole est-elle nécessairement stable par intersection ou union quelconque ?
5.2. ⏩ Toute algèbre de Boole est-elle nécessairement associée à une partition ?