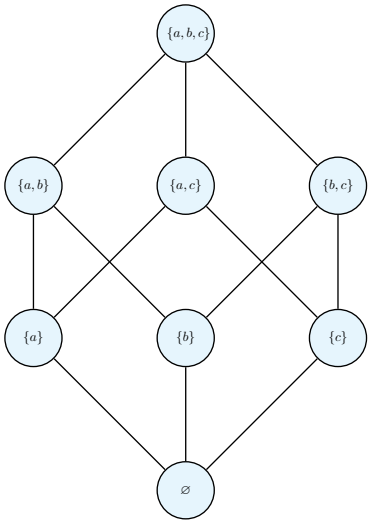
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce devoir vous propose une première introduction à un type de problèmes dont vous n'avez pas l'habitude au lycée: les problèmes **introduisant une nouvelle notion** et vous faisant **manipuler** la définition de cette notion.

D'un point de vue mathématique on s'intéresse aux *algèbres de Boole* sur un ensemble. Il s'agit des ensembles d'ensembles stables par union de deux éléments et par complémentaires (et non vides).

- La première partie traite de quelques exemples particuliers.
- La seconde partie démontre quelques propriétés des algèbres de Boole.
- La troisième partie traite de *morphismes* de ces structures.
- La quatrième partie caractérise les algèbres de Boole finies.
- La dernière partie est totalement facultative.



Cube de Hasse représentant le treillis des parties d'un ensemble

---

Soit E un ensemble.
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de Boole*[1] (sur E) ssi:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) $\forall X \in \mathcal{A}, \quad E \backslash X \in \mathcal{A}$,
(iii) $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \quad X \cup Y \in \mathcal{A}$.

---

1. Quelques cas particuliers

1.1. Dans cette question on considère le cas particulier $E = \mathbb{N}$.

1.1.1. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des entiers impairs. Montrer que

$$\{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$$

est une algèbre de Boole.

On a bien
- $\emptyset \in \{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$,
- pour tout $X \in \{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$, $E \backslash X \in \{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$, en effet
  - ▷ $\mathbb{N} \backslash \emptyset = \mathbb{N}$,
  - ▷ $\mathbb{N} \backslash \mathbb{P} = \mathbb{I}$,
  - ▷ $\mathbb{N} \backslash \mathbb{I} = \mathbb{P}$,
  - ▷ $\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} = \emptyset$.
- et de même on peut tester les $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 10$ unions possibles pour vérifier la stabilité par union,
  - ▷ $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cup \mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\emptyset \cup \mathbb{I} = \mathbb{I}$, $\emptyset \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
  - ▷ $\mathbb{P} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{I} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
  - ▷ $\mathbb{P} \cup \mathbb{P} = \mathbb{P}$,$\mathbb{I} \cup \mathbb{I} = \mathbb{I}$
  - ▷ $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N}$

  et donc on a bien $\boxed{\{\emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\} \text{ est une algèbre de Boole}}$.

  Remarque: il y a évidemment bien plus efficace que de vérifier toutes les possibilités.

1.1.2. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$ on note $\mathbb{T}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv k[3]\}$. L'ensemble de parties

$$\{\emptyset, \mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{N}\}$$

est-il une algèbre de Boole ?

[1] ou plus précisément une *algèbre de Boole de parties*

On a que $\mathbb{T}_0 \cup \mathbb{T}_1$ n'appartient pas à l'ensemble.
En effet
- ce n'est pas $\emptyset$ (car contient par exemple 0),
- ce n'est pas $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{T}_2$ car $2 \notin \mathbb{T}_0 \cup \mathbb{T}_1$,
- ce n'est pas $\mathbb{T}_0$ car contient 1,
- ce n'est pas $\mathbb{T}_1$ car contient 0.

Donc $\boxed{\{\emptyset, \mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{N}\} \text{ n'est } \textbf{pas} \text{ une algèbre de Boole}}$.

1.1.3. Montrer

$$\{X \subset \mathbb{N} \mid (X \text{ est finie}) \text{ ou } (\mathbb{N}\backslash X \text{ est finie})\}$$

est une algèbre de Boole.

Notons $\mathcal{A} = \{X \subset \mathbb{N} \mid (X \text{ est finie}) \text{ ou } (\mathbb{N}\backslash X \text{ est finie})\}$.
- $\emptyset$ est finie, donc $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Soit $X \in \mathcal{A}$. On procède par disjonction de cas
  - ▷ Si X est finie, alors $X = \mathbb{N}\backslash(\mathbb{N}\backslash X)$ est finie, d'où $\mathbb{N}\backslash X \in \mathcal{A}$.
  - ▷ Si $\mathbb{N}\backslash X$ est finie, alors $(\mathbb{N}\backslash X)$ est finie, d'où $\mathbb{N}\backslash X \in \mathcal{A}$.

  Dans tous les cas $\mathbb{N}\backslash X \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.
- Soient $X, Y \in \mathcal{A}$. On procède par disjonction de cas
  - ▷ Si X et Y sont finies, alors $X \cup Y$ est finie d'où $X \cup Y \in \mathcal{A}$.
  - ▷ Sinon X ou Y est de complémentaire fini. Par symétrie du problème on peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{N}\backslash X$ est fini. Alors comme $X \cup Y \supset X$ on a $\mathbb{N}\backslash(X \cup Y) \subset \mathbb{N}\backslash X$, et en particulier est un ensemble fini (comme sous-ensemble d'un ensemble fini). D'où $X \cup Y \in \mathcal{A}$.

  Dans tous les cas $X \cup Y \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est stable par union.

On a donc bien

$$\boxed{\{X \subset \mathbb{N} \mid (X \text{ est finie}) \text{ ou } (\mathbb{N}\backslash X \text{ est finie})\} \text{ est une algèbre de Boole}}.$$

1.2. Soit E un ensemble (non vide quelconque).
Montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\{\emptyset, E\}$ sont des algèbres de Boole sur E. Commenter.

Tout d'abord $\mathcal{P}(E)$ contient bien le vide (car $\emptyset \subset E$), est stable par complémentaire (si $A \subset E$, alors $E\backslash A \subset E$) et par union (si $X \subset E$ et $Y \subset E$ alors $X \cup Y \subset E$). Par conséquent $\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ est une algèbre de Boole}}$.
De même, $\{\emptyset, E\}$ contient bien le vide, est stable par complémentaire (car $E\backslash\emptyset = E$ et $E\backslash E = \emptyset$) et par union (car $E \cup \emptyset = E$, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ et $E \cup E = E$). Par conséquent $\boxed{\{\emptyset, E\} \text{ est une algèbre de Boole}}$.
On peut remarquer que toute algèbre de Boole sur E est contenue dans $\mathcal{P}(E)$ (par définition) et contient $\{\emptyset, E\}$ (car contient $\emptyset$ et son complémentaire). Ce sont donc la plus grande et la plus petite (au sens de l'inclusion) algèbres de Boole.

1.3. Soit E un ensemble (non vide quelconque) et $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E. Montrer que

$$\left\{\bigcup_{i\in J} A_i,\ J \in \mathcal{P}(I)\right\}$$

est une algèbre de Boole, appelée *algèbre associée à la partition.*

Notons $\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{i\in J} A_i,\ J \in \mathcal{P}(I)\right\}$.
- $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} A_i \in \mathcal{A}$.
- Soit $X \in \mathcal{A}$. Alors il existe $J \subset I$ tel que

$$X = \bigcup_{i\in J} A_i.$$

De plus, comme $(A_i)_{i\in I}$ est une partition

$$\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I\backslash J} A_i\right) = E$$

et comme la famille est deux-à-deux disjointe

$$\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I\setminus J} A_i\right) = \emptyset.$$

Par conséquent

$$\boxed{E\setminus\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) = \left(\bigcup_{i\in I\setminus J} A_i\right)}$$

et en particulier on a bien $E\setminus X \in \mathcal{A}$.

- Soient X_1 et X_2 deux éléments de $\mathcal{A}$. Alors il existe J_1 et J_2 des parties de I tel que

$$X_1 = \bigcup_{i\in J_1} A_i \qquad X_2 = \bigcup_{i\in J_2} A_i$$

d'où

$$X_1 \cup X_2 = \bigcup_{i\in J_1\cup J_2} A_i$$

et en particulier on a bien $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{A}$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\left\{\bigcup_{i\in J} A_i,\ J \in \mathcal{P}(I)\right\} \text{ est une algèbre de Boole}}.$$

2. Propriétés en vrac

Soit E un ensemble non vide.

2.I. Stabilité par union et intersection finie

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole.

2.1. Montrer que $\emptyset \in \mathcal{A}$ et que $E \in \mathcal{A}$.

On a $\boxed{\emptyset \in \mathcal{A}}$ par définition, et comme $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire et que $E\setminus\emptyset = E$ on en déduit que $\boxed{E \in \mathcal{A}}$.

2.2. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par intersection, c'est à dire que

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{A}^2, \quad X \cap Y \in \mathcal{A}.$$

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{A}$.
Par stabilité par complémentaire, $E\setminus X$ et $E\setminus Y$ sont dans $\mathcal{A}$.
Par stabilité par union, on en déduit $(E\setminus X)\cup(E\setminus Y)$ est dans $\mathcal{A}$.
Par stabilité par complémentaire, $E\setminus((E\setminus X)\cup(E\setminus Y))$ est dans $\mathcal{A}$.
Or

$$E\setminus((E\setminus X)\cup(E\setminus Y)) = (E\setminus(E\setminus X))\cap(E\setminus(E\setminus Y)) = X\cap Y$$

et donc on a bien montré que $X\cap Y \in \mathcal{A}$.
D'où $\boxed{\mathcal{A} \text{ est stable par intersection}}$.

2.3. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union finie et intersection finie c'est à dire:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}.$$

On procède par récurrence.
Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\mathcal{P}_n :\ \forall (X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}$$

et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$.

► **Initialisation**
(Pour $n = 0$) on a bien $\emptyset \in \mathcal{A}$.
La propriété $\mathcal{P}_1$ s'écrit

$$\forall X_1 \in \mathcal{A}, X_1 \in \mathcal{A}$$

qui est vraie.
On remarque que la propriété $\mathcal{P}_2$ est exactement la stabilité par union de $\mathcal{A}$.

► **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$.
Soit $(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}) \in \mathcal{A}^{n+1}$.
Alors, par stabilité par union de $\mathcal{A}$, $X_n \cup X_{n+1} \in \mathcal{A}$
Donc $(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n \cup X_{n+1}) \in \mathcal{A}^n$.
D'où par l'hypothèse de récurrence

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\right) \cup (X_n \cup X_{n+1}) \in \mathcal{A}$$

c'est à dire

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \in \mathcal{A}.$$

On a donc bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$.

► **Conclusion**
On a montré $\mathcal{P}_1$ et que pour tout $n \geq 1, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. D'où, par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}}.$$

On peut traiter l'intersection dans la même récurrence.
Alternativement on peut remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$, par stabilité par complémentaire on a $(E \backslash X_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$, d'où par la stabilité par union finie que l'on vient de démontrer

$$\bigcup_{i=1}^{n} E \backslash X_i \in \mathcal{A}$$

et donc par stabilité par complémentaire

$$E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} E \backslash X_i\right) \in \mathcal{A}$$

c'est à dire par règles de calculs ensemblistes

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}.$$

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{A}}.$$

Remarque: les deux méthodes utilisées ici:
- La récurrence en regroupant les deux derniers termes (par le cas $n = 2$) pour l'hérédité (faire un schéma !),
- les liens entre union, complémentaire et intersection,

devraient vous sembler désormais très usuelles.

2.II. Algèbre de Boole induite

2.4. Soient $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(E)$ deux algèbres de Boole.
Montrer que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole.
A-t-on nécessairement $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole ?

- On a $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ et $\emptyset \in \mathcal{A}_2$ donc $\emptyset \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
- Soit $X \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
  ▷ Alors $X \in \mathcal{A}_1$ donc comme $\mathcal{A}_1$ est une algèbre de Boole, $E \backslash X \in \mathcal{A}_1$.
  ▷ Alors $X \in \mathcal{A}_2$ donc comme $\mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole, $E \backslash X \in \mathcal{A}_2$.
  Et par conséquent $E \backslash X \in \mathcal{A}_1$ et $E \backslash X \in \mathcal{A}_2$ c'est à dire $E \backslash X \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
- Soient X et Y des éléments de $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
  ▷ Alors $X \in \mathcal{A}_1$ et $Y \in \mathcal{A}_1$, donc comme $\mathcal{A}_1$ est une algèbre de Boole, $X \cup Y \in \mathcal{A}_1$.

▷ Alors $X \in \mathcal{A}_2$ et $Y \in \mathcal{A}_2$, donc comme $\mathcal{A}_2$ est une algèbre de Boole, $X \cup Y \in \mathcal{A}_2$.
Et par conséquent $X \cup Y \in \mathcal{A}_1$ et $X \cup Y \in \mathcal{A}_2$ c'est à dire $X \cup Y \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

On a donc bien montré que $\boxed{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \text{ est une algèbre de Boole}}$.

Prenons par exemple $E = \{1, 2, 3\}$. Alors on vérifie que $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ et $\{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ sont des algèbres de Boole (car algèbres de Boole associées à des partitions) mais leur union est $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ qui n'est pas une algèbre de Boole car par exemple $\{1\}$ et $\{2\}$ font partie de l'ensemble, mais pas leur union $\{1, 2\}$.

Par conséquent $\boxed{\text{l'union de deux algèbres de Boole n'est pas forcément une algèbre de Boole}}$.

2.5. Soit I un ensemble d'indice et $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de Boole indexée par I. Montrer que

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

est une algèbre de Boole.

- On a pour tout $i \in I$, comme $\mathcal{A}_i$ est une algèbre de Boole, $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ et donc $\emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
- Soit $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
  Pour tout $i \in I$, $X \in \mathcal{A}_i$ (par définition de l'intersection), et comme $\mathcal{A}_i$ est une algèbre de Boole on a donc $E \backslash X \in \mathcal{A}_i$.
  Et par conséquent (par définition de l'intersection) $E \backslash X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
- Soient X et Y des éléments de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
  Pour tout $i \in I$, $X \in \mathcal{A}_i$ et $Y \in \mathcal{A}_i$, et comme $\mathcal{A}_i$ est une algèbre de Boole on a donc $X \cup Y \in \mathcal{A}_i$.
  Et par conséquent $X \cup Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

On a donc bien montré que $\boxed{\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ est une algèbre de Boole.}}$

2.6. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $\mathfrak{B}_\mathcal{G}$ l'ensemble des algèbres de Boole contenant $\mathcal{G}$, c'est à dire

$$\mathfrak{B}_\mathcal{G} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E) \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A} \text{ est une algèbre de Boole}\}.$$

Montrer que

$$\text{Bool}(\mathcal{G}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G}} \mathcal{A}$$

est une algèbre de Boole, appelée *algèbre de Boole engendrée* par $\mathcal{G}$.

Par la question précédente $\boxed{\text{Bool}(\mathcal{G}) \text{ est une algèbre de Boole}}$ comme intersection d'algèbres de Boole.

2.7. Montrer que $\mathcal{G} \subset \text{Bool}(\mathcal{G})$ et que pour tout algèbre de Boole $\mathcal{B}$ on a $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ ssi $\text{Bool}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}$.

On a par définition de $\mathfrak{B}_\mathcal{G}$,

$$\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G},\ \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$$

et par conséquent

$$\mathcal{G} \subset \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G}} \mathcal{A}$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathcal{G} \subset \text{Bool}(\mathcal{G})}.$$

On procède ensuite par double implication.
Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole.

- Supposons que $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$.
  Alors, par définition de $\mathfrak{B}_\mathcal{G}$,
  $$\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G}$$
  et donc (avec $\mathcal{A} = \mathcal{B}$),
  $$\exists \mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G},\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$
  d'où
  $$\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\mathcal{G}} \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$
  c'est à dire
  $$\text{Bool}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}.$$
- Supposons $\text{Bool}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{G} \subset \text{Bool}(\mathcal{G})$ on a donc

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{B}.$$

On a donc bien montré

$$\boxed{\text{Pour toute algèbre de Boole } \mathcal{B}, \quad \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Bool}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}}.$$

3. Morphismes d'algèbres de Boole

Soient E et F deux ensembles non vides, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole sur E et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une algèbre de Boole sur F.
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. On dit que f est un *morphisme (d'algèbres de Boole)* ssi:
(i) $\forall X \in \mathcal{A}, \quad f(E\backslash X) = F\backslash f(X)$.
(ii) $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \quad f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
Dans la suite on considère f un tel morphisme.

3.1. Montrer que $f(E) = F$ et $f(\emptyset) = \emptyset$.

On a, comme f est un morphisme,

$$\begin{aligned} f(E) &= f(\emptyset \cup (E\backslash\emptyset)) \\ &= f(\emptyset) \cup f(E\backslash\emptyset) \\ &= f(\emptyset) \cup (F\backslash f(\emptyset)) \\ &= F \end{aligned}$$

et donc $\boxed{f(E) = F}$.
Alors

$$f(\emptyset) = f(E\backslash E) = F\backslash f(E) = F\backslash F = \emptyset$$

et donc $\boxed{f(\emptyset) = \emptyset}$.

3.2. Montrer que $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Soient X et Y des éléments de $\mathcal{A}$.
Alors

$$\begin{aligned} f(X \cap Y) &= f(E\backslash((E\backslash X) \cup (E\backslash Y))) \\ &= F\backslash(f((E\backslash X) \cup (E\backslash Y))) \\ &= F\backslash(f(E\backslash X) \cup f(E\backslash Y)) \\ &= F\backslash((F\backslash f(X)) \cup (F\backslash f(Y))) \\ &= f(X) \cap f(Y). \end{aligned}$$

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)}.$$

On note $\mathcal{I}_f$ l'*image* de f c'est à dire

$$\mathcal{I}_f = \{Y \in \mathcal{B} \mid \exists X \in \mathcal{A}, Y = f(X)\}$$

et on appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathcal{K}_f = \{X \in \mathcal{A} \mid f(X) = \emptyset\}.$$

3.3. Montrer que $\mathcal{I}_f$ est une algèbre de Boole.

On a
- $\underline{\emptyset \in \mathcal{I}_f}$ car $f(\emptyset) = \emptyset$.
- $\underline{\text{Soit } Y \in \mathcal{I}_f}$.
  Par définition il existe alors $X \in \mathcal{A}$ tel que $Y = f(X)$.
  Alors comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, $E\backslash X \in \mathcal{A}$ et comme f est un morphisme d'algèbre de Boole, $f(E\backslash X) = F\backslash f(X) = F\backslash Y$.
  Et donc $\underline{F\backslash Y \in \mathcal{I}_f}$.
- $\underline{\text{Soient } Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}_f}$.
  Par définition il existe alors $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ tels que $Y_1 = f(X_1)$ et $Y_2 = f(X_2)$.
  Alors comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{A}$ et comme f est un morphisme d'algèbre de Boole, $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) = Y_1 \cup Y_2$.
  Et donc $\underline{Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{I}_f}$.

On a donc montré que $\boxed{\mathcal{I}_f \text{ est une algèbre de Boole}}$.

3.4. Montrer que
- $\emptyset \in \mathcal{K}_f$,
- $\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{K}_f^2$, $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{K}_f$,
- $\forall X \in \mathcal{K}_f, \forall T \in \mathcal{A}, X \cap T \in \mathcal{K}_f$.

- On a vu que $f(\emptyset) = \emptyset$ et donc $\boxed{\emptyset \in \mathcal{K}_f}$.
- Soient X_1 et X_2 des éléments de $\mathcal{K}_f$.
  Alors comme f est un morphisme
  $$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$
  et par définition du noyau,
  $$f(X_1) = \emptyset, \quad f(X_2) = \emptyset$$
  d'où
  $$f(X_1 \cup X_2) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$
  c'est à dire, par définition du noyau $\boxed{X_1 \cup X_2 \in \mathcal{K}_f}$.
- Soient $X \in \mathcal{K}_f$ et $T \in \mathcal{A}$.
  Par la question **3.2.**
  $$f(X \cap T) = f(X) \cap f(T)$$
  et par définition du noyau
  $$f(X) = \emptyset$$
  donc
  $$f(X \cap T) = \emptyset \cap f(T) = \emptyset$$
  c'est à dire par définition du noyau $\boxed{X \cap T \in \mathcal{K}_f}$.

3.5. Montrer que
$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \mathcal{I}_f = \mathcal{B}$$
et
$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathcal{K}_f = \{\emptyset\}.$$

Par définition de la surjectivité on a
$$\boxed{f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \mathcal{I}_f = \mathcal{B}}.$$
On procéde par double implication pour le second point.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est injective, comme on a $f(\emptyset) = \emptyset$, par injectivité de f on a pour tout $X \in \mathcal{A}$, $f(X) = \emptyset$ ssi $X = \emptyset$, c'est à dire $\mathcal{K}_f = \{\emptyset\}$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathcal{K}_f = \{\emptyset\}$.
  Soient X_1 et X_2 deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $f(X_1) = f(X_2)$.
  Alors, par la question **3.2.** et comme f est un morphisme,
  $$f(X_1 \cap (E \backslash X_2)) = f(X_1) \cap f(E \backslash X_2) = f(X_1) \cap (F \backslash f(X_2))$$
  et comme $f(X_1) = f(X_2)$ on en déduit que
  $$f(X_1 \cap (E \backslash X_2)) = \emptyset$$
  autrement dit
  $$X_1 \cap (E \backslash X_2) \in \mathcal{K}_f.$$
  On en déduit, d'après l'hypothèse initiale que $X_1 \cap (E \backslash X_2) = \emptyset$ c'est à dire $X_1 \subset X_2$.
  De même, par symétrie on a $X_2 \subset X_1$, d'où $X_1 = X_2$.
  On a donc montré que si $f(X_1) = f(X_2)$ alors $X_1 = X_2$, et donc f est injective.

On a donc bien
$$\boxed{f \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathcal{K}_f = \{\emptyset\}}.$$

Soit G un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(G)$ une algèbre de Boole sur G et $g \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ un morphisme d'algèbres de Boole.

3.6. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est un morphisme d'algèbres de Boole.

- Soit $X \in \mathcal{A}$.
  On a, par définition de la composition, comme f est un morphisme d'algèbres de Boole et comme g est un morphisme

d'algèbre de Boole,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(E\backslash X) &= g(f(E\backslash X))\\ &= g(F\backslash f(X))\\ &= G\backslash g(f(X))\\ &= G\backslash(g\circ f)(X)\end{aligned}.$$

- Soient X et Y des éléments de $\mathcal{A}$.
  On a, par définition de la composition, comme f est un morphisme d'algèbres de Boole et comme g est un morphisme d'algèbre de Boole,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(X\cup Y) &= g(f(X\cup Y))\\ &= g(f(X)\cup f(Y))\\ &= g(f(X))\cup g(f(Y))\\ &= (g\circ f)(X)\cup(g\circ f)(Y)\end{aligned}.$$

Et donc on a bien $\boxed{g\circ f \text{ est un morphisme d'algèbres de Boole}}$.

3.7. Quelles relations d'inclusions peut-on écrire (dans tous les cas) entre $\mathcal{I}_{g\circ f}$, $\mathcal{I}_f$, $\mathcal{I}_g$, $\mathcal{K}_{g\circ f}$, $\mathcal{K}_f$,$\mathcal{K}_g$?

On a

- $\boxed{\mathcal{I}_{g\circ f}\subset\mathcal{I}_g}$, en effet soit $z\in\mathcal{I}_{g\circ f}$. Alors il existe $X\in\mathcal{A}$ tel que $z=(g\circ f)(X)$. Et donc $z=g(f(X))$ et $f(X)\in\mathcal{B}$ et donc $z\in\mathcal{I}_g$.
- $\boxed{\mathcal{K}_{g\circ f}\supset\mathcal{K}_f}$, en effet soit $X\in\mathcal{K}_f$. Alors $f(X)=\emptyset$ et donc $(g\circ f)(X)=g(f(X))=g(\emptyset)=\emptyset$ et donc $X\in\mathcal{K}_{g\circ f}$.
- Les autres inclusions ne sont pas forcément vérifiées (la seule comparaison ayant un sens est entre $\mathcal{K}_g$ et $\mathcal{I}_f$ et a priori il n'y a pas de lien entre les deux).

Remarque essentielle: les propriétés de cette partie sont en fait des propriétés générales des **morphismes** de structures (ici structure d'Algèbre de Boole, mais on verra les mêmes pour les morphismes de groupes, morphismes d'anneaux, morphismes d'espaces vectoriels, etc.)

4. Atomes et algèbres de Boole finies

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole.
Pour tout $x\in E$, on note $\mathcal{A}_x$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ contenant x, c'est à dire

$$\mathcal{A}_x=\{X\in\mathcal{A}\mid x\in X\}$$

et $\mu(x)$ l'ensemble appelé *atome* de $\mathcal{A}$ engendré par x,

$$\mu(x)=\{y\in E\mid \mathcal{A}_y=\mathcal{A}_x\}.$$

4.1. Montrer que

$$\forall(x_1,x_2)\in E^2,\mu(x_1)\cap\mu(x_2)\neq\emptyset\Rightarrow\mu(x_1)=\mu(x_2).$$

Soit $(x_1,x_2)\in E^2$ tel que $\mu(x_1)\cap\mu(x_2)\neq\emptyset$.
Soit $\xi\in\mu(x_1)\cap\mu(x_2)$.
On a donc $\xi\in\mu(x_1)$ et $\xi\in\mu(x_2)$, c'est à dire par définition, $\mathcal{A}_\xi=\mathcal{A}_{x_1}$ et $\mathcal{A}_\xi=\mathcal{A}_{x_2}$.
Donc $\mathcal{A}_{x_1}=\mathcal{A}_{x_2}$.
Et par conséquent, pour tout $y\in E$, $\mathcal{A}_y=\mathcal{A}_{x_1}\Leftrightarrow\mathcal{A}_y=\mathcal{A}_{x_2}$, c'est à dire pour tout $y\in E$, $y\in\mu(x_1)$ ssi $y\in\mu(x_2)$, ou encore $\mu(x_1)=\mu(x_2)$.
On a donc bien montré

$$\boxed{\forall(x_1,x_2)\in E^2,\mu(x_1)\cap\mu(x_2)\neq\emptyset\Rightarrow\mu(x_1)=\mu(x_2)}.$$

4.2. Montrer que la famille $\{\mu(x)\}_{x\in E}$ est une partition de E.
Remarque: on dit qu'un ensemble M est une partition ssi la famille associée $(m)_{m\in M}$ est une partition.

- Le caractère $\boxed{\text{deux à deux disjoints}}$ est issu de la question précédente.
- Pour tout $\xi\in E$,

$$\xi\in\mu(\xi)$$

car $\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_\xi$ et par conséquent

$$\xi \in \bigcup_{x\in E} \mu(x)$$

d'où on déduit $E \subset \bigcup_{x\in E} \mu(x)$.
Donc la $\boxed{\text{réunion est } E}$.

4.3. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{A}$,

$$X = \bigcup_{x\in X} \mu(x).$$

On procède par double inclusion

- $\boxed{\subset}$ Soit $\xi \in X$. Comme

$$\xi \in \mu(\xi)$$

et que $\xi \in X$, on en déduit (car $x = \xi$ convient)

$$\exists x \in X,\ \xi \in \mu(x)$$

c'est à dire

$$\xi \in \bigcup_{x\in X} \mu(x)$$

et comme $\xi \in X$ est arbitraire, on a donc bien

$$\boxed{X \subset \bigcup_{x\in X} \mu(x)}.$$

- $\boxed{\supset}$ Soit $x \in X$.
Comme $X \in \mathcal{A}$ et $x \in X$ on a $X \in \mathcal{A}_x$.
Soit $y \in \mu(x)$, alors $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_x$ et donc $X \in \mathcal{A}_y$.
Et donc $y \in X$.
On a donc montré $\mu(x) \subset X$.
Et comme $x \in X$ est arbitraire, on a donc

$$\forall x \in X, \mu(x) \subset X$$

et par conséquent

$$\boxed{\bigcup_{x\in X} \mu(x) \subset X}.$$

4.4. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\mu(x) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}_x} X.$$

Soit $x \in E$.
On procède par double inclusion

- $\boxed{\subset}$
Soit $y \in \mu(x)$, c'est à dire tel que $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_x$.
Soit $X \in \mathcal{A}_x$.
Alors $X \in \mathcal{A}_y$ c'est à dire $y \in X$.
Comme $X \in \mathcal{A}_x$ est arbitraire, on a donc montré

$$\boxed{\mu(x) \subset \bigcap_{X\in\mathcal{A}_x} X}.$$

- $\boxed{\supset}$
Soit $y \in \bigcap_{X\in\mathcal{A}_x} X$.
Montrons $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y$ par double inclusion.
  - ▷ $\boxed{\subset}$ Soit $\Xi \in \mathcal{A}_x$.
  Alors comme $y \in \bigcap_{X\in\mathcal{A}_x} X$, en particulier $y \in \Xi$.
  D'où $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_y$.
  - ▷ $\boxed{\supset}$ Soit $\Xi \in \mathcal{A}_y$.
  Alors $y \in \Xi$ et $\Xi \in \mathcal{A}$.

Supposons par l'absurde que $x \notin \Xi$.
Cela équivaut à $x \in E \backslash \Xi$.
C'est à dire, comme $E\backslash\Xi \in \mathcal{A}$, $E\backslash\Xi \in \mathcal{A}_x$.
Donc, en particulier $y \in E\backslash\Xi$.
Cela est absurde donc $x \in \Xi$.
D'où on a bien montré $\mathcal{A}_x \supset \mathcal{A}_y$.
Par conséquent on a montré $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y$ c'est à dire $y \in \mu(x)$ et donc

$$\boxed{\bigcap_{X \in \mathcal{A}_x} X \subset \mu(x)}.$$

On suppose désormais que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole **finie**, c'est à dire constituée d'un nombre fini d'éléments.

4.5. Montrer que pour tout $x \in E$, $\mu(x) \in \mathcal{A}$.

Soit $x \in E$.
Comme $\mathcal{A}$ est finie et $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}$, en particulier $\mathcal{A}_x$ est finie.
Par conséquent l'intersection $\bigcap_{X \in \mathcal{A}_x} X$ est une intersection d'un nombre **fini** d'éléments de $\mathcal{A}$ et donc par la stabilité par intersection finie montrée à la question **2.3.**,

$$\bigcap_{X \in \mathcal{A}_x} X \in \mathcal{A}$$

et donc par la question **4.4.**, on a bien $\boxed{\mu(x) \in \mathcal{A}}$.

4.6. En déduire que le nombre d'atomes est fini, puis que tout élément de $\mathcal{A}$ est une union finie d'atomes.

Les atomes sont donc des éléments d'un ensemble fini ($\mathcal{A}$) et par conséquent $\boxed{\text{il existe un nombre fini d'atomes}}$.
Soit $X \in \mathcal{A}$.
Par la question **4.3.**, on a

$$X = \bigcup_{x \in X} \mu(x)$$

et en particulier X peut s'écrire comme une réunion (a priori quelconque) d'atomes. Mais comme il existe un nombre fini d'atomes, on peut donc écrire $\boxed{X \text{ comme une réunion finie d'atomes}}$.

4.7. Démontrer le résultat suivant:

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole **finie** sur E, alors il existe une partition finie $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E telle que

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \right\}.$$

C'est à dire que toute algèbre de Boole finie est une algèbre associée à une partition.

Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les atomes c'est à dire $\mathcal{M} = \{\mu(x), x \in E\}$.
Considérons la famille des atomes $(m)_{m \in \mathcal{M}}$.

- D'après la question précédente $\mathcal{M}$ est finie, quitte à numéroter les éléments de $\mathcal{M}$ on peut écrire (avec un léger abus de notation) $\mathcal{M} = (A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
- D'après la question **4.2.**, $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une partition de E.
- D'après la question précédente, pour tout $X \in \mathcal{A}$, il existe $J \subset [\![1,n]\!]$ fini tel que $X = \bigcup_{i \in J} A_i$. On a donc

$$\mathcal{A} \subset \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \right\}.$$

- D'après la question **4.5.**, tous les atomes sont dans $\mathcal{A}$ et donc, par la question **2.3.**, toutes les unions finies d'atomes aussi, d'où

$$\mathcal{A} \supset \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \right\}.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\text{toute algèbre de Boole finie est une algèbre associée à une partition}}.$$

5. Bonus: le cas non fini

(Pour les questions marquées ⏩ on pourra se contenter d'une idée (ou schéma) peu rédigée.)

5.1. ⏩ Une algèbre de Boole est-elle nécessairement stable par intersection ou union quelconque ?

Pas nécessairement.
Reprenons l'algèbre de Boole de la question 1.(c) de la première partie,

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbb{N} \mid (X \text{ est finie}) \text{ ou } (\mathbb{N}\backslash X \text{ est finie})\}$$

et notons, comme dans la question 1.(a), $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des entiers impairs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{2n\}$ est fini et donc $\{2n\} \in \mathcal{A}$. Or

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\} = \mathbb{P}$$

et $\mathbb{P}$ n'est pas finie, ni de complémentaire ($\mathbb{N}\backslash\mathbb{P} = \mathbb{I}$) fini. Donc $\mathbb{P} \notin \mathcal{A}$ et par conséquent $\boxed{\mathcal{A} \text{ n'est pas stable par union quelconque}}$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}\backslash\{2n\} \in \mathcal{A}$ (car de complémentaire $\{2n\}$ fini). Or

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N}\backslash\{2n\}) = \mathbb{N}\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\}\right) = \mathbb{I}$$

et $\mathbb{I} \notin \mathcal{A}$ (ni finie, ni de complémentaire fini). Donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ n'est pas non plus stable par intersection quelconque}}$.

5.2. ⏩ Toute algèbre de Boole est-elle nécessairement associée à une partition ?

Pas nécessairement.
Reprenons l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ des parties finies ou de complémentaire fini de $\mathbb{N}$ (question 1.(c) de la première partie).
Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ est associée à une partition, c'est à dire qu'il existe une partition $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{i\in J} A_i,\ J \in \mathcal{P}(I)\right\}.$$

Soit $i \in I$. Comme $(A_i)_{i\in I}$ est une partition, A_i est non vide: soit $x \in A_i$.
Le singleton $\{x\}$ est fini donc $\{x\} \in \mathcal{A}$, et il existe ainsi $J \subset I$ tel que

$$\{x\} = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Comme $x \in \{x\}$, il existe $j \in J$ tel que $x \in A_j$, et comme la famille est deux-à-deux disjointe et que $x \in A_i$, on a nécessairement $j = i$. Donc $i \in J$ et par conséquent $A_i \subset \{x\}$, c'est à dire $A_i = \{x\}$.
Toutes les parties de la partition sont donc des singletons, et comme leur réunion est $\mathbb{N}$, on a $\{A_i, i \in I\} = \{\{x\}, x \in \mathbb{N}\}$.
Par conséquent

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{i\in J} A_i,\ J \in \mathcal{P}(I)\right\} = \left\{\bigcup_{x\in X} \{x\},\ X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\right\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Or, par la question précédente, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mais $\mathbb{P} \notin \mathcal{A}$. Cela est absurde.
Donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ n'est associée à aucune partition}}$.
Remarque: avec les notations de la partie précédente, on peut vérifier que les atomes de $\mathcal{A}$ sont exactement les singletons ($\mu(x) = \{x\}$, car $\{x\} \in \mathcal{A}_x$ mais $\{x\} \notin \mathcal{A}_y$ pour $y \neq x$): l'algèbre associée à la partition des atomes serait $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, strictement plus grande que $\mathcal{A}$.
Alternativement, on peut remarquer qu'une algèbre de Boole associée à une partition est toujours stable par union quelconque, ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{A}$ par la question précédente.