Graphes

Énoncés 2
Premières définitions 2
Cliques et anticliques 2
Chemins et connexité 3
Coloriages et nombre chromatique 4
Exercices en vrac 6
Quelques références pour aller plus loin 7
Indications 8
Solutions 11

Énoncés

Premières définitions

Dans la suite étant donné un graphe $G = (V, E)$ on utilisera les notations suivantes:

- pour $v \in V$, $d(v)$ le degré de V
- $\delta(G) = \min(\{d(v), v \in V\})$ le plus petit degré des sommets du graphe.
- $\Delta(G) = \max(\{d(v), v \in V\})$ le plus grand degré des sommets du graphe.
- $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G c'est à dire $\overline{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on notera aussi

- N_n le graphe vide à n sommets.
- K_n le graphe complet à n sommets.
- C_n le graphe cycle à n sommets.

Exercice 1 (◔★♠ Lemme des poignées de main)
Étant donné un graphe $G = (V, E)$ on a

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} d(v).$$

Indication p. 8 · Solution p. 11

Exercice 2 (◔★ Nombre de sommets de degré impair)
Montrer que dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Indication p. 8 · Solution p. 11

Exercice 3 (◔★ Deux sommets de même degré)
Montrer que dans tout graphe il existe deux sommets de même degré.

Indication p. 8 · Solution p. 11

Cliques et anticliques

Un ensemble de sommets est appelé *clique* (resp. *anticlique*) ssi le graphe qu'il induit est le graphe complet (resp. le graphe vide).

Exercice 4 (◑★ On enlève l'anticlique)
Soit A une anticlique d'un graphe G.

Montrer que

$$|E| \leq \sum_{v \in V \setminus A} d(v).$$

Indication p. 8 · Solution p. 12

Exercice 5 (◑★ Premier petit schéma de triangle)
Montrer que tout graphe à 6 sommets possède soit une clique de 3 sommets soit une anticlique de 3 sommets.

Indication p. 8 · Solution p. 12

Exercice 6 (◑★ Tout le monde se connaît au village)
À une fête de village, tout le monde connaît au moins une personne (et on suppose que la relation «connaître» est réflexive).

On suppose que dans tout groupe d'au moins 3 personnes il n'y a jamais exactement deux paires de connaissances.

Montrer que tout le monde se connaît.

Indication p. 8 · Solution p. 13

Chemins et connexité

Exercice 7 (◑★ L'un des deux est connexe)
Soit G un graphe.

Montrer que si G est non connexe alors $\overline{G}$ est connexe.

Solution p. 13

Exercice 8 (◑★ Un certains nombre de sommets implique la connexité)
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Montrer que si $\delta(G) \geq \frac{|V|-1}{2}$ alors G est connexe.

Indication p. 8 · Solution p. 13

Exercice 9 (◔★ Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe connexe alors $|E| \geq |V| - 1$.

Indication p. 8 · Solution p. 14

Exercice 10 (◑☆ Retirer des sommets et connexité)
Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| \geq 3$.

Montrer que G est connexe **ssi** il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G_1' et G_2' obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes.

Indication p. 9 · Solution p. 15

Exercice 11 (◑☆ Cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$)
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq 2$.

Montrer G possède un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.

Indication p. 9 · Solution p. 15

Coloriages et nombre chromatique

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ un *coloriage* (par sommets) d'un graphe correspond à l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe.

Formellement un coloriage à m couleurs est donc une application de $c : V \to \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble à m éléments.

Exercice 12 (◑☆ La majorité de l'autre couleur)
Soit G un graphe.

Montrer que l'on peut colorier le graphe en deux couleurs tel que chaque sommet a une majorité (au sens large) de voisins de l'autre couleur.

Indication p. 9 · Solution p. 16

Un coloriage est dit *propre* ssi il n'existe jamais deux voisins de même couleur, c'est à dire formellement pour tout $\{v_1, v_2\} \in V$, $c(v_1) \neq c(v_2)$.

Étant donné G un graphe on note $\chi(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir un coloriage propre de G, appelé *nombre chromatique* de G.

Autrement dit il existe au moins un coloriage propre à $\chi(G)$ couleurs et aucun coloriage propre à strictement moins de $\chi(G)$ couleurs.

Pour montrer que $\chi(G) = m$ on procède souvent en deux étapes
- ▹ Montrer que $\chi(G) \leq m$ en construisant explicitement un coloriage propre à m couleur.

▹ Montrer que $\chi(G) \geq m$ en montrant qu'il n'existe aucun coloriage propre à strictement moins de m couleurs, par exemple par l'absurde.

Remarques

▹ Le nombre chromatique $\chi(G)$ est bien défini car il existe toujours au moins un coloriage propre fini.
▹ Pour tout graphe (tel que $V \neq \varnothing$) $G = (V, E)$ on a $1 \leq \chi(G) \leq |E|$; (il faut au moins une couleur et attribué une couleur différente à chaque sommet de G fournit un coloriage correct).
▹ Si H est un sous-grape de G alors $\chi(H) \leq \chi(G)$. En effet tout coloriage propre de G induit un coloriage propre de

Exercice 13 (◔★♠ Nombre chromatique de graphes usuels)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\chi(K_n)$ le nombre chromatique du graphe complet à n sommets.
2. Déterminer $\chi(N_n)$ le nombre chromatique du graphe vide à n sommets.
3. Déterminer $\chi(C_n)$ le nombre chromatique du cycle à n sommets, on pourra distinguer selon la parité de n.

Indication p. 9

On dit qu'un graphe est biparti si son nombre chromatique est inférieur ou égal à 2.

Exercice 14 (◔★♠ Théorème de König)
Montrer qu'un graphe est biparti ssi tous ses cycles sont de longueurs paires.

Indication p. 9 · Solution p. 16

Exercice 15 (◑☆ L'un ou l'autre (ou presque))
Déterminer tous les graphes G tels que G et $\overline{G}$ sont bipartis.

Indication p. 9 · Solution p. 17

Exercice 16 (◑★ Premier encadrement grossier)
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\,|E| + \frac{1}{4}}$.

Indication p. 9 · Solution p. 17

Exercice 17 (◔☆ Un autre encadrement simple)
Soit G un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Indication p. 10 · Solution p. 18

Exercice 18 (◕☆ Théorème de Brooks)
Traiter l'exercice 17.

1. Montrer que si pour un graphe complet K_n, avec n quelconque, ou un graphe cycle C_n, avec n impair, on a $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
2. Montrer que si G est un graphe tel que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ alors G est soit un graphe complet K_n pour un certain n, soit un graphe cycle C_n avec n impair.

Indication p. 10

Exercice 19 (◔★ Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Pour un graphe G on note $\omega(G)$ le maximum des tailles des cliques de G et $\overline{\omega}(G)$ le maximum des tailles des anticliques de G.

Montrer que pour tout graphe $G = (V, E)$,

$$\chi(G) \geq \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

Indication p. 10 · Solution p. 18

Exercices en vrac

Exercice 20 (◑☆ Un exemple de coloriage d'arêtes)
On dit qu'un coloriage *par arêtes* est propre ssi il n'existe deux arêtes de même couleur ayant une extrémité commune.

Étant donné un graphe G on note $\chi'(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier par arêtes G.

Montrer que si G est un graphe bipartite alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Solution p. 19

Exercice 21 (◑☆ Tournoi des villes 1985)
Soit n un entier naturel.

On considère un tableau $n \times n$ dans lequel on inscrit n fois chaque nombre entre 1 et n.

Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\lceil \sqrt{n} \rceil$ nombres différents.

Solution p. 20

Exercice 22 (◑☆ Olympiades de Mathématiques Balkanique 2002)
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq 3$.

Montrer que G contient au moins un cycle de longueur paire.

Solution p. 20

Exercice 23 (◑★ Un exercice d'ampoules)
On considère des ampoules placées sur les sommets d'un graphe $G = (V, E)$.

À chaque étape on peut changer l'état (allumée ou éteinte) d'une ampoule et de toutes les ampoules sur les sommets voisins.

Est-il toujours possible de passer en un nombre fini d'étapes de la configuration où toutes les ampoules sont éteintes à la configuration où toutes les ampoules sont allumées ?

Solution p. 21

Exercice 24 (◑☆ Une application de Mantel)
On considère 2024 points distincts sur le cercle unité.

Montrer qu'il existe au moins 1023132 cordes dont l'angle au centre est inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Solution p. 21

Quelques références pour aller plus loin

- Cours de Pierre Bornstein sur les graphes pour la POFM https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/graphes.pdf
- Cours de Margaret Bilu sur la théorie des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphesdeb.pdf et la théorie extrémale des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphes.pdf
- Diestel, R., 2000. *Graduate texts in mathematics: Graph theory*. SpringerVerlag.
- Trudeau, R.J., 2013. *Introduction to graph theory*. Dover.
- Chartrand, G. and Zhang, P., 2013. *A first course in graph theory*. Dover.

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Lemme des poignées de main)
Double compter le nombre d'arêtes.

Solution p. 11

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Nombre de sommets de degré impair)
Par exemple utiliser 1.

Solution p. 11

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Deux sommets de même degré)
Par exemple principe des tiroirs.

Solution p. 11

Indication 4 · Énoncé p. 3 (On enlève l'anticlique)
Faire un schéma et séparer selon que l'on est rejoint ou non à l'anticlique.

Solution p. 12

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Premier petit schéma de triangle)
Faire un schéma et montrer que G ou $\overline{G}$ contient une clique de 3 sommets.

Solution p. 12

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Tout le monde se connaît au village)
Commencer par traduire en termes de graphes.

Solution p. 13

Indication 8 · Énoncé p. 3 (Un certains nombre de sommets implique la connexité)
On peut montrer qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre tous sommets de G.

Solution p. 13

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Faire un schéma. Par exemple par récurrence.

Solution p. 14

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Retirer des sommets et connexité)
▷ Pour le sens réciproque faire des chemins.
▷ Pour le sens direct, choisir par exemple deux sommets de distance maximale.

Solution p. 15

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$)
Construire récursivement un tel cycle.

Solution p. 15

Indication 12 · Énoncé p. 4 (La majorité de l'autre couleur)
Pas forcément besoin de l'explicité, un argument de maximalité suffit.

Solution p. 16

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Nombre chromatique de graphes usuels)
On obtient:
1. $\chi(K_n)=n$.
2. $\chi(N_n)=1$.
3. $\chi(C_n)=2$ si n est pair et $\chi(C_n)=3$ si n est impair.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Théorème de König)
Pour le sens réciproque faire un parcours en profondeur.

Solution p. 16

Indication 15 · Énoncé p. 5 (L'un ou l'autre (ou presque))
Montrer que ce n'est pas possible si on a beaucoup de sommets.

Solution p. 17

Indication 16 · Énoncé p. 5 (Premier encadrement grossier)
Montrer que $\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|$.

Solution p. 17

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Un autre encadrement simple)
Construire un coloriage récursivement.

Solution p. 18

Indication 18 · Énoncé p. 6 (Théorème de Brooks)
1. Juste compter.

Indication 19 · Énoncé p. 6 (Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Quel est le nombre chromatique d'une clique ?

Solution p. 18

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 · Indication p. 8 (Lemme des poignées de main)
À chaque arête est associée exactement deux sommets.

Alternativement si on veut rédiger plus précisément, on a par double comptage, d'un côté comme à chaque arête $\{v_1, v_2\}$ est associée exactement deux couples (v_1, v_2).

$$|\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| = 2\,|E|$$

et de l'autre en notant pour tout $v \in V$, $N(v)$ l'ensemble des voisins de v,

$$\begin{aligned} |\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| &= \sum_{v_1 \in V} |\{(v_1, v_2) \mid v_2 \in N(v_1)\}| \\ &= \sum_{v_1 \in V} d(v_1) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 · Indication p. 8 (Nombre de sommets de degré impair)
On a d'après le lemme des poignées de main

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v)$$

et donc modulo 2,

$$0 \equiv \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v) \ [2]$$

ou encore

$$0 \equiv \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} 0 + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} 1 \ [2]$$

c'est à dire

$$|\{v \in V \mid d(v) \text{ impair }\}| \equiv 0[2].$$

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 2 · Indication p. 8 (Deux sommets de même degré)
Si tous les sommets sont de degré non nul, alors comme les degrés sont dans $[\![1, n-1]\!]$ et au nombre de n, par le principe des tiroirs il en existe deux de même degré.

Sinon on note G' le sous-graphe obtenu à partir de G en retirant tous les sommets de degré 0.

Alors dans G' deux sommets sont de même degré, et donc de même degré dans G (car on n'a retiré que des sommets sans voisins).

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 3 · Indication p. 8 (On enlève l'anticlique)
On partitionne les sommets de G en $V = A \sqcup (V \setminus A)$, ce qui revient à colorier d'une couleur les sommets dans A et d'une autre les autres sommets, par exemple en vert les sommets de A et en bleu les sommets de $V \setminus A$.

On note aussi pour un sommet v, $d_{V\setminus A}(v)$ le nombre de voisins bleus et $d_A(v)$ le nombre de voisins verts.

On compte ensuite le nombre d'arêtes selon la « couleur » de ses extrémités.

- Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont verts est de 0 par définition des anticliques.
- Le nombre d'arêtes reliant un sommet bleu à un sommet vert est par définition (en sommant sur les bleus, comme dans la preuve du lemme des poignées de main)
$$\sum_{v\in V\setminus A} d_A(v)$$
- Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont bleus est le degré dans le graphe induit par $V \setminus A$ c'est à dire par le lemme des poignées de main
$$\frac{1}{2}\sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

au final on a donc

$$|E| = 0 + \sum_{v\in V\setminus A} d_A(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

et comme les degrés sont positifs et que

$$\sum_{v\in V\setminus A} d(v) = \sum_{v\in V\setminus A} d_A(v) + \sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

on en déduit donc le résultat.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 3 · Indication p. 8 (Premier petit schéma de triangle)
Cela revient à montrer que G contient une clique à 3 sommets ou $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G contient une clique à 3 sommets.

Soit v_0 un sommet quelconque.

Comme il y a 5 autres sommets, au moins 3 sommets sont voisins de v_0 ou au moins 3 sommets ne sont pas voisins de v_0.

Quitte à considérer $\overline{G}$ on peut supposer qu'au moins trois sommets sont voisins de v_0. Notons v_1, v_2, v_3 trois tels sommets.

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une anticlique c'est terminé.

Sinon, si par exemple v_1 et v_2 sont voisins alors $\{v_0, v_1, v_2\}$ forme une clique.

On procède de même si v_2 et v_3 sont voisins ou si v_3 et v_1 sont voisins.

Dans tous les cas on a bien une clique de 3 sommets ou une anticlique de 3 sommets.

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 3 · Indication p. 8 (Tout le monde se connaît au village)
Cela revient à montrer qu'un graphe dont aucun sommet n'est de degré 0 et donc aucun graphe induit possède exactement deux arêtes est un graphe complet.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets v_1 et v_2 qui ne sont pas voisins.

Par hypothèse il existe v_1' voisin de v_1.

- Si v_1' est voisin de v_2 alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1'\}$, par hypothèse v_1 et v_2 sont voisins. Absurde.
- Donc v_1' n'est pas voisin de v_2.

Par le même raisonnement il existe v_2' un sommet voisin de v_2 qui n'est pas voisin de v_1.

De plus en considérant le graphe induit par (par exemple) $\{v_1, v_1', v_2'\}$, v_1' et v_2' ne sont pas voisins.

Mais alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1', v_2'\}$ on obtient un sous-graphe constitué de deux arêtes. C'est donc absurde.

Solution pour l'exercice 7 · Énoncé p. 3 (L'un des deux est connexe)
Soit G un graphe non connexe.

Il possède alors au moins deux composantes connexes, et en particuliers il existe un coloriage de G en deux couleurs (par exemple bleu et vert) tel qu'aucun sommet d'une couleur n'est dans la même composante connexe qu'un sommet d'une autre couleur (et que les deux couleurs apparaissent).

Étant donné deux sommets v_1 et v_2 on procède alors par disjonction de cas.

- Si v_1 et v_2 sont deux couleurs différentes, ils ne sont pas dans une composante connexe commune, en particulier ne sont pas voisins dans G et donc sont voisins dans $\overline{G}$ et donc en particulier dans la même composante connexe dans $\overline{G}$.
- Si v_1 et v_2 de même couleur. Sans perte de généralité supposons qu'ils soient tous les deux bleus.

  Soit w un sommet vert (existe bien par hypothèse).

  Alors de même que précédemment v_1 et w sont voisins dans $\overline{G}$ et v_2 et w sont voisins dans $\overline{G}$. Par conséquent (v_1, w, v_2) est un chemin de v_1 à v_2 dans $\overline{G}$.

Et donc dans tous les cas il existe un chemin entre v_1 et v_2.

On remarque que l'on a en fait montré beaucoup plus fort: non seulement il existe un chemin mais on peut s'arranger pour que ce chemin soit de longueur 1 ou 2 (selon que v_1 et v_2 sont ou non dans la même composante connexe de G).

Solution pour l'exercice 8 · Énoncé p. 3 · Indication p. 8 (Un certains nombre de sommets implique la connexité)
On va même montrer qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre tous sommets de G.

Soient v_1 et v_2 deux sommets distincts de G.

On procède par disjonction de cas.

- Si v_1 et v_2 sont voisins ils sont reliés par un chemin de longueur 1.
- Sinon comme $d(v_1) \geq \frac{n-1}{2}$ et $d(v_2) \geq \frac{n-1}{2}$, en particulier

$$d(v_1) + d(v_2) \geq n - 1.$$

Or il y a $n-2$ sommets différents de v_1 et v_2, d'où le nombre de sommets voisins de v_1 et de v_2 est au moins de 1.

Avec w un tel sommet on a donc le chemin (v_1, w, v_2) de longueur 2 qui relie v_1 et v_2.

Dans tous les cas v_1 et v_2 sont reliés par un chemin de longueur au plus 2.

On remarque que pour $n \geq 1$, si on met deux copies de K_n « côte-à-côte » alors on obtient un graphe non connexe tel que $\delta(G) = n - 1 = \frac{|V|-2}{2}$ et par conséquent l'inégalité précédente est optimale.

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 4 · Indication p. 8 (Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Pour tout entier naturel n on note $\mathcal{H}_n$ la proposition «tout graphe connexe admettant n sommets admet au moins $n-1$ arêtes».

- **Initialisation**

Pour $n = 1$ c'est bien le cas.

- **Hérédité**

Soit n un entier naturel, et supposons $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Soit $G = (V, E)$ tel que $|V| = n + 1$.

On procède par disjonction de cas.

- Si tous les sommets sont de degrés plus grands que 2 alors, par le lemme des poignées de main

$$2\ |E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2(n+1)$$

donc $|E| \geq n + 1 \geq (n+1) - 1$.

- Si il existe un sommet de degré 1 (comme le graphe est connexe avec au moins 2 sommets, en particulier tous les degrés sont non nuls). Notons v_0 un tel sommet.

Notons $G' = (V', E')$ le sous-graphe obtenu en retirant le sommet v_0.

Alors comme $|V'| = (n+1) - 1 = n$ par hypothèse de récurrence, $|E'| \geq n - 1$. Et donc $|E| = |E'| + d(v_0) \geq (n-1) + 1 = n$ vérifie bien $|E| \geq (n+1) - 1$.

Dans tous les cas $|E| \geq (n+1) - 1$.

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

- **Conclusion**

On a montré $\mathcal{H}_1$ et que pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ implique $\mathcal{H}_{n+1}$, donc par récurrence pour tout n, $\mathcal{H}_n$.

Solution pour l'exercice 10 · Énoncé p. 4 · Indication p. 9 (Retirer des sommets et connexité)
On procède par double implication.

▷ **Sens réciproque**

Supposons qu'il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G_1' et G_2' obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes, et fixons v_1 et v_2 de tels sommets.

Soient u et w deux sommets de G. Montrons par disjonction de cas qu'il existe un chemin de u à w.

- ▷ Si $\{u,w\} = \{v_1, v_2\}$. Comme $|V| \geq 3$ il existe un sommet $\omega \in V$ distincts de v_1 et v_2 et donc sommet de G_1' et G_2'.

  Comme G_1' est connexe il existe un chemin de v_2 à ω dans G_1' et donc dans G.

  De même comme G_2' est connexe il existe un chemin de ω à v_1 dans G_2' et donc dans G.

  En les concaténant on obtient alors un chemin de v_2 à v_1.
- ▷ Sinon sans perte de généralité on peut supposer $v_1 \notin \{u,w\}$. Comme G_1' est connexe il existe un chemin de u à w dans G_1' et donc dans G.

Dans tous les cas il existe un chemin de u à w, et ce quels que soient les sommets et donc G est connexe.

▷ **Sens direct**

Comme l'ensemble des distances entre sommets est fini il existe un couple (v_1, v_2) de distance maximale c'est à dire tel que

$$\text{dist}(v_1, v_2) = \max(\{\text{dist}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in V^2\}).$$

(Cette distance est appelée diamètre du graphe)

Montrons que ces sommets conviennent.

Sans perte de généralité montrons que G_1' obtenu en enlevant v_1 de G est connexe.

Soient u et w deux sommets de G (distincts de v_1). On cherche à montrer qu'il existe un chemin entre u et w dans G_1', c'est à dire un chemin entre u et w dans G ne passant par v_1.

Comme G est connexe il existe un chemin entre u et v_2 et un chemin entre w et v_2. Considérons les plus courts chemins parmi ces chemins que l'on note C_u et C_w.

Si v_1 est sur le chemin de C_u on a $\text{dist}(v_1, v_2) < \text{dist}(u, v_2)$ ce qui contredit la maximalité. Donc v_1 n'est pas sur C_u. De même v_1 n'est pas sur C_w.

Mais en concaténant C_u et C_w on obtient alors un chemin entre u et w ne passant pas par v_1.

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 4 · Indication p. 9 (Cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$)
Posons $k = \delta(G)$; par hypothèse $k \geq 2$. On construit récursivement une suite de sommets $v_1, v_2, ...$ où chaque v_{r+1} est un voisin de v_r :

- On choisit v_1 un sommet quelconque du graphe.
- On suppose construits $v_1, ..., v_r$.
  - Si $r \leq k$, comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_1, ..., v_{r-1}\}$ de cardinal $r-1 < k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.
  - Si $r > k$, comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_{r-k+1}, ..., v_{r-1}\}$ de cardinal $k-1 < k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.

Le procédé se poursuit indéfiniment alors que le graphe est fini : par le principe des tiroirs, un sommet finit par se répéter. Soit j le plus petit indice tel que $v_j \in \{v_1, ..., v_{j-1}\}$, et soit $i < j$ tel que $v_i = v_j$; les sommets $v_1, ..., v_{j-1}$ sont alors deux à deux distincts.

Tant que $r \leq k$, le premier cas rend v_{r+1} distinct de tous les sommets déjà choisis ; la première répétition vérifie donc $j - 1 > k$, et v_j provient du second cas : il est distinct de ses k prédécesseurs $v_{j-k}, ..., v_{j-1}$.

Si l'on avait $j - i \leq k$, alors $i \in \{j-k, ..., j-1\}$, d'où $v_i \neq v_j$, ce qui contredit $v_i = v_j$. Donc $j - i > k$, et

$$(v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$$

est un cycle de longueur $j - i \geq k + 1 = \delta(G) + 1$.

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 4 · Indication p. 9 (La majorité de l'autre couleur)
L'ensemble des coloriages possibles est fini (il y en a même $2^{|V|}$), parmi cet ensemble considérons un coloriage maximisant le nombre d'arêtes « bicolores » (dont les deux extrémités sont de couleurs différentes).

Montrons qu'un tel coloriage convient.

Supposons par l'absurde qu'un sommet a strictement plus de voisins de sa couleur que de voisins de couleur différente.

En changeant la couleur de ce sommet on augment alors strictement le nombre d'arêtes bicolores ce qui contredit l'hypothèse de maximalité.

D'où le résultat.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 5 · Indication p. 9 (Théorème de König)
On procède par double implication.

- **Sens direct** Considérons un graphe biparti G et un cycle $v_1, ..., v_{r-1}, v_r = v_1$ de longueur r.

  Comme $\chi(G) \leq 2$ on peut colorier G en deux couleurs, disons bleu et vert.

  Sans perte de généralité v_1 est bleu, d'où v_2 est vert, et de même par récurrence immédiate v_k est bleu si k est impair et vert si k est pair. Comme $v_r = v_1$ on en déduit que r est pair.

  Alternativement on aurait pu procéder par contraposée, si un graphe G possède un cycle de longueur impaire, on a donc C_n est un sous-graphe de G pour un certain n impair, et donc $\chi(G) \geq \chi(C_n) = 3 > 2$.
- **Sens réciproque**

Soit G un graphe dont tous les cycles sont de longueurs paires.

Quitte à colorier chaque composante connexe on peut se ramener au cas où G est connexe.

On propose ici un algorithme pour construire un tel coloriage.

Fixons un sommet arbitraire w.

Pour tout sommet v on note $\text{dist}(w,v)$ la longueur du plus petit chemin de v à w (existe par connexité).

On colorie alors en bleu les sommets de distance minimale paire et en vert les sommets de distance minimale impaire.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets de même couleurs voisins.

Si ce sont deux sommets verts v_1 et v_2 alors en considérant un chemin minimal de w à v_1 puis une arête de v_1 à v_2 puis un chemin minimal de v_2 à w on obtient un cycle de longueur

$$\underbrace{\text{dist}(w,v_1)}_{\text{impair}} + 1 + \underbrace{\text{dist}(w,v_2)}_{\text{impair}}$$

qui est donc impaire. Absurde.

De même pour deux sommets bleus.

Par conséquence on obtient bien un coloriage en deux couleurs tel qu'aucun sommet n'est de la même couleur que son voisin, c'est à dire $\chi(G) \leq 2$.

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 5 · Indication p. 9 (L'un ou l'autre (ou presque))
Montrons que si $G=(V,E)$ vérifie $|V| \geq 3$ alors $\chi(G) > 2$ ou $\chi\left(\overline{G}\right) > 2$.

Soit $G=(V,E)$ un graphe tel que $|V| \geq 3$ et supposons que $\chi(G) \leq 2$. Colorions G en deux couleurs, par exemple bleu et vert et notons V_b et V_v les sommets de couleurs respectives bleu et vert.

Comme $|V| = |V_b| + |V_v| \geq 5$ on peut supposer sans perte de généralité que $|V_b| \geq 3$.

Mais comme le graphe induit par V_b dans $\overline{G}$ est $K_{|V_b|}$ on a donc

$$\chi\left(\overline{G}\right) \geq \chi\left(K_{|V_b|}\right) > 2.$$

Il reste donc à regarder le cas $|V| \leq 4$ ce qui fait un nombre fini de cas à traiter (cf schémas).

Solution pour l'exercice 16 · Énoncé p. 5 · Indication p. 9 (Premier encadrement grossier)
Montrons tout d'abord que $\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|$.

Le cas $\chi(G)=1$ étant immédiat on suppose désormais $\chi(G) \geq 2$.

Considérons un coloriage propre avec $\chi(G)$ couleurs.

Si un couple de couleurs distinctes n'est pas présent parmi les arêtes, par exemple si il n'y a aucune arête dont les extrémités sont de couleurs 1, 2 alors en coloriant tous les sommets de couleurs 1 ou 2 en la couleur 1 on obtient un coloriage propre.

Par conséquent on obtient un coloriage propre avec $\chi(G)-1$ couleurs ce qui est absurde.

On a donc montré que tous les couples de couleurs distinctes sont présents parmi les arêtes, et comme il y en a $\binom{\chi(G)}{2}$ on a bien

$$\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|.$$

On rappelle que pour tout entier N, $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$. Donc le résultat précédent se réécrit

$$\chi(G)^2 - \chi(G) \leq 2\ |E|$$

et une étude de trinôme du second degré, par exemple en mettant l'inégalité sous la forme canonique

$$\left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2|E| + \frac{1}{4}$$

et en constatant que $\chi(G) \geq \frac{1}{2}$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$,

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\ |E| + \frac{1}{4}}.$$

On remarque par ailleurs que pour tout graphe complet K_n, $\chi(K_n) = n$ et $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ et il y a alors égalité. L'inégalité est donc optimale.

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 6 · Indication p. 10 (Un autre encadrement simple)
On se donne $\Delta(G)+1$ couleurs.

On choisit une énumération des sommets, et on les colorie récursivement.

Pour chaque sommet on le colorie d'une couleur qui n'est pas utilisée par ses voisins déjà coloriés. Comme il y a au moins $\Delta(G)+1-\Delta(G)$ possibilités c'est toujours possible.

Par construction le coloriage obtenu est propre.

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 6 · Indication p. 10 (Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Soit $G=(V,E)$ un graphe.

- Comme G admet une clique de taille $\omega(G)$, $K_{\omega(G)}$ est un sous-graphe de G.

  Donc

  $$\chi(G) \geq \chi\Big(K_{\omega(G)}\Big) = \omega(G).$$

- Considérons un coloriage en $\chi(G)$ couleurs notées $1, 2, ..., \chi(G)$.

  Alors pour tout i l'ensemble des sommets de couleur i, noté V_i forme une anticlique.

  Donc

  $$\sum_{i\in[\![1,\chi(G)]\!]} |V_i| = |V|$$

  et comme

$$\sum_{i\in[\![1,\chi(G)]\!]} |V_i| \leq \chi(G)\overline{\omega}(G)$$

on obtient bien

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}.$$

Donc

$$\chi(G) \geq \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

On remarque par ailleurs que l'égalité est atteinte pour les graphes complets K_n on de manière générale des graphes multi-parti $K_{m,\dots,m}$.

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 6 (Un exemple de coloriage d'arêtes)
Tout d'abord quel que soit le graphe on a $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (car les arêtes ayant pour extrémité un sommet commun de degré maximal sont toutes de couleurs différentes).

On procède par **récurrence sur le nombre d'arêtes**.

Plus précisément pour $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{H}_m$ la propriété «Pour tout graphe bipartite $G = (V, E)$ tel que $|E| = m$, on a $\chi'(G) = \Delta(G)$.»

- **Initialisation**

  Pour $m = 0$, si un graphe G n'a pas d'arêtes on a $\Delta(G) = 0$ et $\chi'(G) = 0$.
- **Hérédité**

  Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}_m$.

  Soit $G = (V, E)$ tel que $|E| = m + 1$.

  On choisit une arête $\{v_1, v_2\}$ et on considère H le sous-graphe obtenu en retirant l'arête $\{v_1, v_2\}$.

  Comme $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ et H a m arêtes, on a $\chi'(H) \leq \Delta(G)$ par hypothèse de récurrence.

  On considère un coloriage par arêtes de H en $\Delta(G)$ couleurs.

  On note $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) l'ensemble des couleurs non prises par les arêtes ayant pour extrémité v_1.

  Comme v_1 et v_2 sont de degré au plus $\Delta(G) - 1$ dans H (car de degré au plus $\Delta(G)$ dans G et on a retiré une arête), et que $|\mathcal{C}_1| = \Delta(G) - d_H(v_1)$ on obtient que $\mathcal{C}_1$ est non vide. De même pour $\mathcal{C}_2$.

  - Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \varnothing$ il suffit de colorier $\{v_1, v_2\}$ d'une de ces couleurs communes.
  - Sinon soient $c_1 \in \mathcal{C}_1$ et $c_2 \in \mathcal{C}_2$.

    On considère alors le plus long chemin, dans H, issu de v_1 et dont les couleurs alternent entre c_2 et c_1.

Comme le graphe est **bipartite** ce chemin ne repasse pas deux fois par le même sommet (faire un dessin pour s'en convaincre en séparant clairement les deux composantes), car si un chemin passe deux fois par le même sommet comme les couleurs des arêtes alternent on peut en déduire un cycle de longueur impaire ce qui est impossible.

Pour la même raison le chemin ne peut pas passer par v_2.

En intervertissant les couleurs c_1 et c_2 pour toutes les arêtes du chemin, par maximalité dudit chemin on obtient toujours un coloriage propre de H.

Dans ce nouveau coloriage v_1 et v_2 sont coloriés de la couleur c_2 et on se ramène donc au cas précédent.

▷ **Conclusion**

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout graphe biparti G ayant m arêtes admet un coloriage propre en au plus $\Delta(G)$ couleurs donc pour tout graphe G

$$\chi'(G) \leq \Delta(G)$$

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 7 (Tournoi des villes 1985)
On considère un graphe bipartite avec d'un côté des sommets représentant les nombres, $k_1, ..., k_n$ et de l'autre côté des sommets représentant les lignes et colonnes $\ell_1, ..., \ell_n$, $c_1, ..., c_n$.

Pour i et j entre 1 et n on trace une arête entre le sommet k_i et celui ℓ_j (resp. k_i et c_j) ssi k_i apparaît sur la ligne ℓ_j (resp. sur la colonne c_j).

On cherche donc à montrer que parmi les sommets $\ell_1, ..., \ell_n, c_1, ..., c_n$ au moins un est de degré supérieur à $\sqrt{n}$.

Par principe des tiroirs il suffit de montrer que le nombre d'arêtes est supérieur à $2n \times \sqrt{n}$.

Considérons maintenant un sommet k_i correspondant à un nombre i.

Notons $L(i)$ l'ensemble des lignes où i apparaît et $C(i)$ l'ensemble des colonnes où i apparaît.

En considérant le sous-tableau de lignes $L(i)$ et de colonnes $C(i)$ on a comme i apparaît n fois $L(i) \times C(i) \geq n$.

Par IAG on en déduit $L(i) + C(i) \geq 2\sqrt{n}$. Donc $\deg(k_i) = L(i) + C(i) \geq 2\sqrt{n}$ et donc le nombre de sommets est au moins $n \times 2\sqrt{n}$.

D'où le résultat.

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 7 (Olympiades de Mathématiques Balkanique 2002)
On considère un chemin de longueur maximale, que l'on note $(v_1, v_2, ..., v_r)$.

Comme $d(v_1) \geq 3$ il existe au moins deux voisins de v_1 distincs de v_2.

Si ces sommets ne sont pas dans le chemin on pourrait étendre le chemin ce qui contredit la maximalité.

On peut donc choisir i, j tels que $2 < i < j \leq r$ et v_i et v_j voisins de v_1.

On considère les trois cycles $(v_1, ..., v_i, v_1)$, $(v_1, ..., v_j, v_1)$ et $(v_1, v_i, v_{i+1}, ..., v_j, v_1)$. La somme de leur longueur est $i + j + (j - i + 2)$ qui est pair donc au moins un est de longueur paire.

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 7 (Un exercice d'ampoules)
Montrons par récurrence sur n que cela est bien possible pour tout graphe possédant n sommets (et on décrit par la même occasion un algorithme récursif de résolution).

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$ c'est bien le cas.
- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel, supposons que c'est possible pour tout graphe possédant n sommets de changer l'état de toutes les ampoules.

  Soit $G = (V, E)$ un graphe de $n + 1$ sommets.

  Pour tout sommet $v \in V$, par hypothèse de récurrence sur le graphe obtenu en retirant v il est possible de changer d'état l'ensemble des ampoules sur les sommets différents de v, par une suite d'opérations notée O_v.

  On procède par disjonction de cas.

  - Si il existe un sommet v tel qu'en faisant la suite d'opérations O_v l'état de la lampe située en v est aussi changé alors c'est bon.
  - Sinon pour tout v, après la suite d'opérations O_v le sommet v est inchangé.

    On procède de nouveau par disjonction de cas sur la parité de n.
    - Si n est pair, en appliquant tous les O_v pour $v \in V$, chaque ampoule change d'état $n - 1$ fois et comme $n - 1$ est impair chaque ampoule change donc d'état.
    - Si n est impair, comme la somme des degrés est paire (par le lemme des poignées de main), il existe au moins un sommet de degré pair. Notons w un tel sommet. En appliquant O_v pour chaque sommet voisin de w on obtient alors que toutes les ampoules changent d'état sauf celles situées en w et sur les sommets voisins de w.

      Il reste alors à changer l'état de w et de ses voisins pour conclure.

Solution pour l'exercice 24 · Énoncé p. 7 (Une application de Mantel)
Posons $n = 2024$.

On considère le graphe $G = (V, E)$ dont les sommets sont les points, et tel que deux sommets sont reliés ssi l'angle au centre de la corde associée est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

Alors si on considère un triangle constitué de trois cordes, comme la somme des angles au centre des cordes est de 2π, les trois angles au centre ne peuvent pas tous être strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Le graphe G n'admet donc pas de triangle, et par le théorème de Mantel $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

Donc le nombre d'arêtes dans $\overline{G}$ est d'au moins $\binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ce qui donne le résultat.