Fonctions de Plusieurs Variables

Énoncés 2
Calculs explicites 2
Fonctions de plusieurs variables 5
Indications 13

Énoncés

Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on note le laplacien de f,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On rappelle qu'une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée ssi $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.

Calculs explicites

Exercice 1 (◔★ Ensemble de définition)
Représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \exp(x \ln(y))$

2. $f_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3}$

3. $f_3 : (x, y) \mapsto \ln(x^3 - y^3)$

4. $f_4 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sin(xy)}$

Indication p. 13

Exercice 2 (◔★ Courbes de niveau)
Représenter les courbes de niveau des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. $f_2 : (x, y) \mapsto 2\ln(x) - \ln(y)$

3. $f_3 : (x, y) \mapsto x - \cos(2\pi y)$

4. $f_4 : (x, y) \mapsto \dfrac{x + y}{2 + |x - y|}$

Indication p. 13

Exercice 3 (◔★ Calculs de dérivées partielles)
Calculer, sans se préoccuper de l'ensemble de définition, les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+4xy}}$$

2. $$f_2 : (x,y) \mapsto \tan(xy)$$

3. $$f_3 : (x,y) \mapsto \left(1+\frac{x}{y}\right)^y$$

4. $$f_4 : (x,y) \mapsto 2\arctan\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

5. $$f_5 : (x,y) \mapsto yx^2+y^3-y^2x+2$$

6. $$f_6 : (x,y) \mapsto \int_0^{(1+y)} \exp\left(-\frac{t^2}{2x^2}\right) \mathrm{d}t$$

Indication p. 13

Exercice 4 (◔★ Différentes représentations)
Associer à chaque surface représentative la courbe de niveau et l'expression correspondantes.

1. Courbes 3d (voir le schéma)
2. Courbes de niveau (voir le schéma)
3. Expressions de fonctions

▷ $f_1 : (x,y) \mapsto \cos(x+y)$

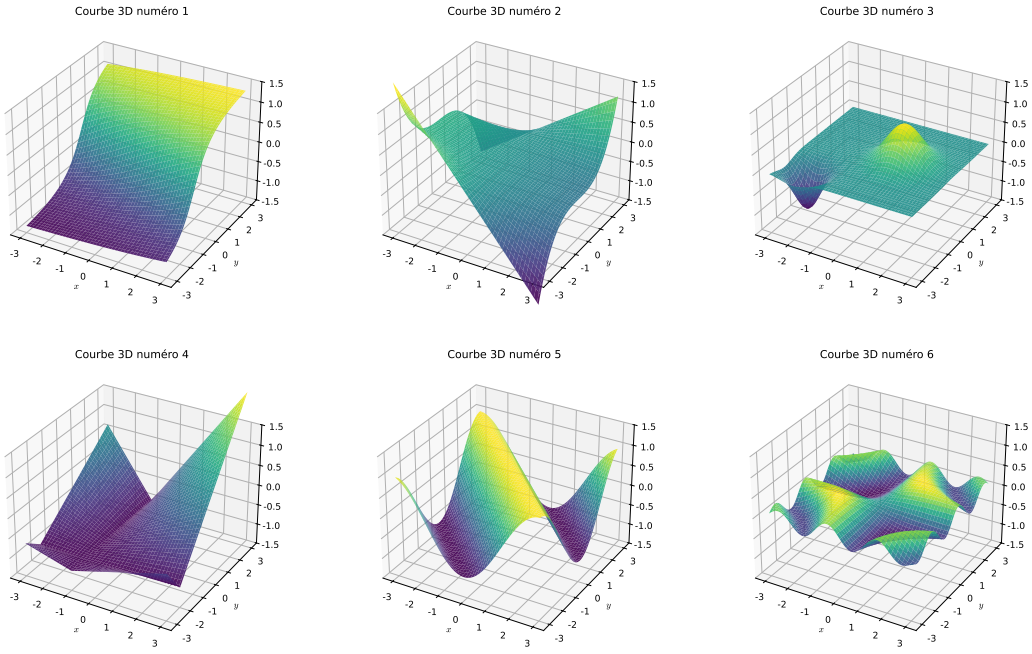
▷ $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\left(\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right)x$

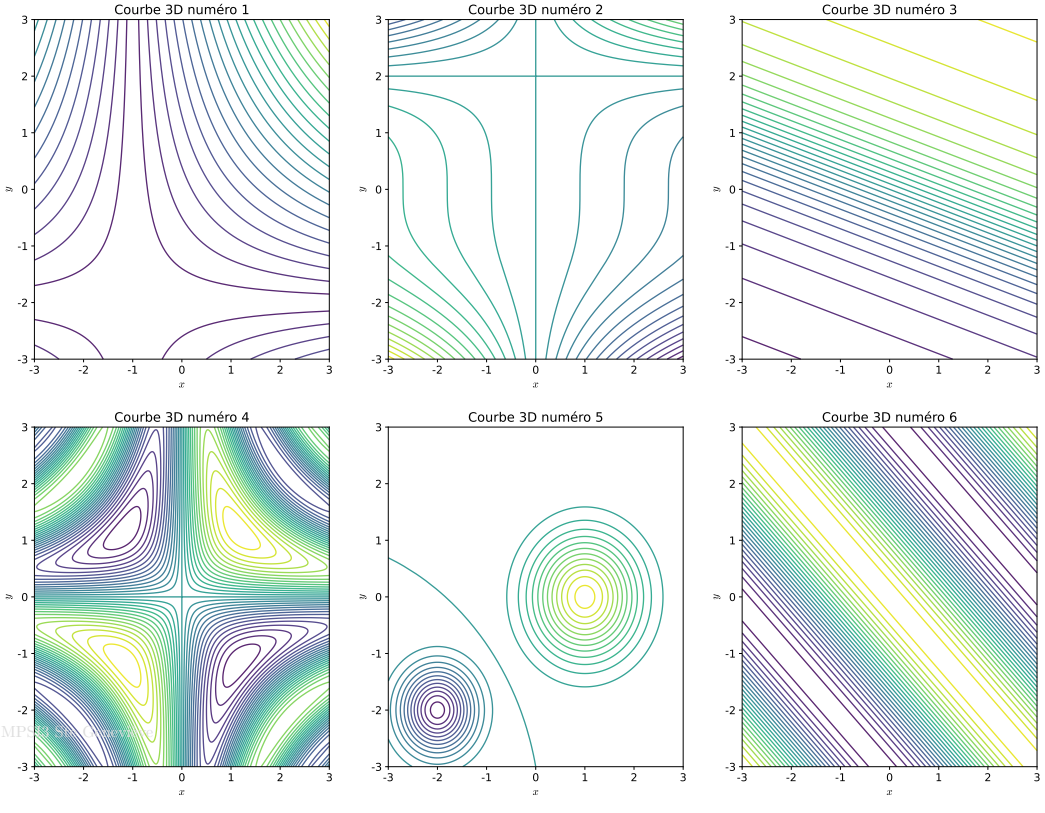
▷ $f_3 : (x,y) \mapsto e^{-((x-1)^2+y^2)} - e^{-2((x+2)^2+(y+2)^2)}$

▷ $f_4 : (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

▷ $f_5 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\,|y+2|\,|x+1| - 6$

▷ $f_6 : (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{3}+y\right)$





Fonctions de plusieurs variables

Exercice 5 (◔★♠ Autour des fermés)

1. Donner des exemples de parties qui sont fermées et ouvertes de $\mathbb{R}^n$.

Donner des exemples de parties qui ne sont ni fermées ni ouvertes de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer qu'une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x \in F$.

Indication p. 13

Exercice 6 (◔★♠ Opérations et ouverts)

1. Montrer qu'une union quelconque de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

2. Montrer qu'une intersection finie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

3. Montrer qu'une intersection quelconque de parties fermées de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

4. Montrer qu'une union finie de parties fermées de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

5. Donner des exemples d'union infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas ouverte et d'une intersection infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas ouverte.

Indication p. 13

Exercice 7 (◔★ Gradient nul)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ est *connexe par arcs* $\mathcal{C}^1$ ssi pour tous $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in U$ il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1],U)$ telle que $\varphi(0) = (x_0,y_0)$, $\varphi(1) = (x_1,y_1)$.

1. Faire un schéma de la propriété de connexité par arcs $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe par arcs $\mathcal{C}^1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in U$.

Montrer que f est constante sur U.

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai pour un ouvert quelconque ?

Indication p. 13

Exercice 8 (◔★♠ Coordonnées polaires)
Soit $f : (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{f} :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R} \\ (r,\theta) &\mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Indication p. 13

Exercice 9 (◔★ Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla(f)(x)\| \leq K.$$

Montrer que f est K-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, i.e. que

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, |f(x_0) - f(x_1)| \leq K \parallel x_0 - x_1 \parallel .$$

Indication p. 13

Exercice 10 (◔★▫ Le tout début de l'analyse vectorielle)
Pour $f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ on note

- ▹ Le rotationnel de f,

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

- ▹ La divergence de f,

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

- ▹ Le laplacien vectoriel de f,

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

On admet que pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et de même

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\nabla \times (\nabla(f)) = 0.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Montrer que

$$\div (\nabla \times (f)) = 0.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Montrer que

$$\nabla \times ((\nabla \times (f))) = \nabla(\div (f)) - \Delta f.$$

Indication p. 13

Exercice 11 (◔★ Fonction d'une seule variable)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = h(x).$$

Indication p. 14

Exercice 12 (◑★ Pas d'injection en changeant de dimension)
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R} > 0$.

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(B(a,R),\mathbb{R})$ injective.

Indication p. 14

Exercice 13 (◔☆ Un calcul usuel)
On considère

$$f : (x,y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1\big(\mathcal{D}_f,\mathbb{R}\big)$ et calculer pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\nabla(f)(x,y)$.
3. Commenter.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{y \to \frac{1}{x}} f(x,y).$$

Indication p. 14

Exercice 14 (◑★ Des solutions autosimilaires de l'équation de la chaleur)
Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t}} g\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et calculer pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

2. Montrer que f vérifie

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

ssi g vérifie

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, g''(\xi) + \xi g'(\xi) + g(\xi) = 0.$$

3. Déterminer, à l'aide d'une intégrale, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, y''(\xi) + \xi y'(\xi) + y(\xi) = 0.$$

4. Commenter.

Indication p. 14

Exercice 15 (◔★ Régression linéaire)
Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ non tous égaux et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ des réels.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on pose

$$\mathcal{E}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

1. Interpréter $\mathcal{E}(a,b)$.
2. Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\nabla(E)(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer le minimum de $\mathcal{E}$ et le point (a,b) qui le réalise.

Indication p. 14

Exercice 16 (◑★ Prolongement sur la diagonale)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $\Delta = \{(t,t), t \in \mathbb{R}\}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

On note φ ce prolongement par continuité.

1. Montrer que ce prolongement par continuité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication p. 14

Exercice 17 (◑★ Fonctions homogènes et équation d'Euler)
Soit $k \in \mathbb{R}$. On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est k-homogène ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que f est k-homogène ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla(f)(x) \rangle = k f(x).$$

Indication p. 14

Exercice 18 (◔★ Équations de Cauchy-Riemann)
On identifie dans cet exercice $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$.

Ainsi une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

est vue comme une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big). \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_y}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial f_x}{\partial y} = -\frac{\partial f_y}{\partial x} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par produit.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \in \mathcal{H}$ et que $z \mapsto \overline{z} \notin \mathcal{H}$.

Indication p. 14

Exercice 19 (◑★ Convexité et gradient)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de f convexe.
2. Montrer que f est convexe ssi pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \nabla(f)(x) - \nabla(f)(y), x-y \rangle \geq 0.$$

Indication p. 15

Exercice 20 (◔☆ Un exemple de changement de coordonnées)
On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,x), x \in \mathbb{R}_-\}$.

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in U, x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Indication p. 15

Exercice 21 (◉☆ Loi de groupe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)
Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto x \star y\end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que $\star$ est commutative.

Indication p. 15

Exercice 22 (◑★ Laplacien d'une fonction radiale)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On pose

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(\|x\|).\end{aligned}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\Delta\varphi(x) = \frac{n-1}{\|x\|} f'(\|x\|) + f''(\|x\|).$$

Indication p. 15

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Ensemble de définition)

1. $y > 0$,
2. Compléter le carré.
3. Stricte croissance de la fonction cube.
4. Retirer des hyperboles.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Courbes de niveau)

1. Cercles concentriques.
2. Ensemble de définition et puis $y = x^2$.
3. On sait tracer $y = f(x)$ donc on peut tracer $x = f(y)$.
4. Faire précautionneusement les disjonctions de cas.

Indication 3 · Énoncé p. 3 (Calculs de dérivées partielles)
Calculs explicites.

Pour l'intégrale, faire un changement de variables pour faire une dépendance dans les bornes de l'intégrale.

Indication 5 · Énoncé p. 5 (Autour des fermés)

1. Seulement $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont ouvertes et fermées. Prendre un ensemble un peu quelconque, il n'est ni fermé ni ouvert.
2. Rédaction automatique

Indication 6 · Énoncé p. 5 (Opérations et ouverts)

1. Rédaction automatique.
2. Prendre le min des rayons.
3. Complémentaire d'une intersection.
4. Complémentaire d'une union.

Indication 7 · Énoncé p. 5 (Gradient nul)

1. Faire des segments et une règle de la chaîne ou bien deux dérivées partielles successives.
2. Faire un petit chemin.
3. Règle de la chaîne pour $f \circ \varphi$.

Indication 8 · Énoncé p. 6 (Coordonnées polaires)
Formule de la chaîne.

Indication 9 · Énoncé p. 6 (Inégalité des accroissements finis)
Étudier $t \mapsto f(x_0 + t(x_1 - x_0))$.

Indication 10 · Énoncé p. 7 (Le tout début de l'analyse vectorielle)
Il s'agit d'un calcul direct.

Ces formules seront extrêmement utiles en électromagnétisme (MP et PSI) et en mécanique des fluides (PSI).

Indication 11 · Énoncé p. 7 (Fonction d'une seule variable)
Un sens est direct.

Pour l'autre sens juste définir h.

Indication 12 · Énoncé p. 8 (Pas d'injection en changeant de dimension)
Prendre deux points quelconques.

Si les valeurs sont différentes, faire deux chemins sans intersection, puis le TVI sur les valeurs de f sur les deux chemins.

Vous verrez d'autres arguments pour ce résultat:
- ▷ Des arguments de connexité pour $\mathbb{R}$ comme image d'arrivée.
- ▷ Des arguments bien plus complexes pour R^n vers $\mathbb{R}^p$ avec $n > p$.

Indication 13 · Énoncé p. 8 (Un calcul usuel)
1. C'est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
2. Après simplification on trouve que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
3. Au moins deux commentaires sont possibles:
   - ▷ Le gradient est nul, mais f n'est pas constante sur $\mathcal{D}_f$, par exemple $f(0,0) = 0$ et $f\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right) = \pi$.
   - ▷ On retrouve la formule d'addition des arctangentes.
4. On retrouve le $\frac{\pi}{2}$ usuel.

Indication 14 · Énoncé p. 9 (Des solutions autosimilaires de l'équation de la chaleur)
1. Calcul explicite.

Indication 15 · Énoncé p. 9 (Régression linéaire)
1. Il s'agit de l'écart quadratique, i.e de la méthode des moindres carrés.
2. Calculer le gradient et obtenir un système 2×2.

Indication 16 · Énoncé p. 10 (Prolongement sur la diagonale)
1. Prolonger par $\varphi'(x)$ en (x,x).
2. Par exemple Taylor reste-intégral.

Indication 17 · Énoncé p. 10 (Fonctions homogènes et équation d'Euler)
Dans un sens dériver par rapport à λ la k-homogénéité de f.

Dans l'autre sens dériver par rapport à λ, $\frac{1}{\lambda^k} f(\lambda x)$.

Indication 18 · Énoncé p. 11 (Équations de Cauchy-Riemann)
1. RAS.
2. Faire le calcul.
3. L'identité est dedans.

De manière surprenante, on peut montrer que $\mathcal{H}$ est en fait … stable par dérivation (méditer sur le sens). Cf cours sur les fonctions holomorphes dans deux ans.

Indication 19 · Énoncé p. 11 (Convexité et gradient)
Différencier sur le chemin entre x et y.

Indication 20 · Énoncé p. 11 (Un exemple de changement de coordonnées)
Passer en polaire.

Indication 21 · Énoncé p. 12 (Loi de groupe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)
Commencer par différencier l'associativité.

Indication 22 · Énoncé p. 12 (Laplacien d'une fonction radiale)
Calcul explicite.