Probabilités et Variables Aléatoires

Énoncés 2
Probabilités 2
Variables aléatoires 5
Indications 14
Solutions 18

Énoncés

Dans tout le TD, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.

Probabilités

Exercice 1 (◔★ Mesure image)
Soient $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$ deux espaces probabilisables finis.

Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω_1 et $f : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Montrer que $f_*\mathbb{P}$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega_2), (f_*\mathbb{P})(B) = \mathbb{P}(f^{-1}(B))$$

est une probabilité sur Ω_2

Indication p. 14

Exercice 2 (◔★♠ Formule du crible)
Soient $A_1, ..., A_n$ des évènements. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} \mathbb{P}\left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}\right)\end{aligned}$$

Indication p. 14

Exercice 3 (◔★♠ Loi hypergéométrique)
On considère une urne contenant N_1 boules bleues et N_2 boules vertes.

On tire n boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Vandermonde.

Indication p. 14

Exercice 4 (◔★ Tirage et maximum)
On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire **avec remise** n boules et on note X le maximum. Déterminer la loi de X.
2. On tire **sans remise** n boules et on note X le maximum. Déterminer la loi de X.
3. Comparer les deux résultats et commenter.

Indication p. 14

Exercice 5 (◔★ Loi hypergéométrique et limite)
Soit $p \in [0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On effectuera les calculs de cette question comme si pour tout $N \in \mathbb{N}$, $pN \in \mathbb{N}$.

   Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

2. Interpréter d'un point de vue probabiliste le résultat précédent.
3. Proposer un cadre permettant de justifier rigoureusement les calculs précédents.

Indication p. 14

Exercice 6 (◑★ Probabilités et indicatrice d'Euler)
On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers plus petits que n et premiers avec n.

Soit n et m deux entiers premiers entre eux.

On muni $[\![1,nm]\!]$ de la probabilité uniforme.

1. Montrer que les évènements $A = \{k \in [\![1,nm]\!] \mid k \wedge n = 1\}$ et $B = \{k \in [\![1,nm]\!] \mid k \wedge m = 1\}$ sont indépendants.
2. En déduire que

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m).$$

Indication p. 14

Exercice 7 (◔★ Indépendance avec soi-même)
Déterminer tous les évènements A tels que A est indépendant avec A.

Indication p. 14

Exercice 8 (◔★ Une inégalité liée à CS)
Soient A et B deux évènements.

Montrer que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Indication p. 14

Exercice 9 (◔★ Normalisation)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur $[\![0, n]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\})$ est proportionnel à k.

Indication p. 14

Exercice 10 (◔☆ Calcul et indépendance)
Soient A et B deux évènements.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) \times P\left(A \cap \overline{B}\right).$$

Indication p. 14

Exercice 11 (◔☆ Copartition)
Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. Montrer

$$P(A \cup B) + P\left(A \cup \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup B\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 3.$$

Indication p. 14

Exercice 12 (●☆ Une inégalité non évidente)
Soient $A_1, ..., A_n$ des événements.

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$C_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, ..., A_n\}.$$

Montrer

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leq \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Indication p. 15 · Solution p. 18

Exercice 13 (◕☆ Mini problème: un peu d'entropie)
Pour $\alpha = \{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\beta = \{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ deux s.c.e, on dit que α est plus fin que β, et on note $\alpha \succ \beta$ ssi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, m]\!], A_i \subset B_j.$$

1. Montrer que $\succ$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des s.c.e.

Pour $\alpha = \{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un s.c.e. on définit l'*entropie* de α (relativement à $\mathbb{P}$) par

$$S_{\mathbb{P}}(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \ln(\mathbb{P}(A_i))$$

en adoptant la convention «$0 \ln(0) = 0$».

1. Montrer que $\alpha \mapsto S_{\mathbb{P}}(\alpha)$ est croissante.

2. Déterminer $\max_{\alpha \text{ s.c.e}}(S_{\mathbb{P}}(\alpha))$ et $\min_{\alpha \text{ s.c.e}}(S_{\mathbb{P}}(\alpha))$.

Variables aléatoires

Exercice 14 (◔★ Égalité de Cavalieri ou formule des queues)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k).$$

Indication p. 15

Exercice 15 (◔★ Encore une égalité de Cavalieri)
Soit X une v.a finie telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (f(k+1) - f(k))\mathbb{P}(X > k).$$

Indication p. 15

Exercice 16 (◔★ Des inégalités déjà connues)
Démontrer et **nommer** les inégalités suivantes:

1. Pour X et Y deux variables aléatoires et $\eta > 0$

$$\mathbb{E}[XY] \leq \eta \mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{4\eta}\mathbb{E}[Y^2]$$

2. Pour X et Y deux variables aléatoires

$$\mathbb{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

3. Pour I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset I$,

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

4. Pour X une variable aléatoire strictement positive

$$\frac{1}{\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]} \leq \exp(\mathbb{E}[\ln(X)]) \leq \mathbb{E}[X]$$

5. Pour X, Y deux variables aléatoires, $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\mathbb{E}[\![XY]\!] \leq (\mathbb{E}[\![X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[\![Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

6. Pour X, Y deux variables aléatoires et $p \in [1, +\infty[$,

$$(\mathbb{E}[(X+Y)^p])^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}[\![X|^p])^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}[\![Y|^p])^{\frac{1}{p}}$$

7. Pour X, Y, Z des variables aléatoires

$$\mathbb{E}[\![X - Y]\!] \leq \mathbb{E}[\![X - Z]\!] + \mathbb{E}[\![Z - Y]\!].$$

Indication p. 15

Exercice 17 (◔★ Quelle inégalité connue)
Soient X, Y des variables aléatoires **indépendantes** et identiquement distribuées à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \geq 1.$$

Indication p. 15

Exercice 18 (◑☆ Une variante non indépendante)
Soient X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $]0, +\infty[$ de même loi (mais non nécessairement indépendantes).

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \geq 1.$$

Indication p. 15

Exercice 19 (◔★ Comment traiter un maximum)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note

$$M_r = \max(X_1, ..., X_r).$$

1. Déterminer pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(M_r \leq k)$.
2. En déduire la loi de M_r.
3. Écrire $\mathbb{E}[M_r]$ sous la forme d'une somme simple.
4. Calculer $\mathbb{E}[M_r]$ pour $r \in \{1, 2, 3\}$.
5. Commenter.

Indication p. 15

Exercice 20 (◔★♠ De Markov à pleins d'autres inégalités)
Soit X une variable aléatoire et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante.

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[f(|X - \mathbb{E}[X]|)]}{f(a)}$$

Indication p. 15

Exercice 21 (◔★ Structure euclidienne et trinôme)
Soit X une variable aléatoire.

Déterminer les extremas de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto \mathbb{E}\big[(X-m)^2\big] \end{aligned}$$

Indication p. 15

Exercice 22 (◔★ Convergence en loi vers Poisson)
Soit $\lambda > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $X_n \sim \mathcal{B}\big(n, \frac{\lambda}{n}\big)$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 23 (◑★ Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)
Soit X une variable aléatoire et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ tels que

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$

$$0 \leq ax + bx - ab - x^2 \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2. En déduire que

$$\mathrm{Var}(X) \leq (b - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X] - a)$$

3. En déduire que

$$\mathrm{Var}(X) \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Indication p. 15 · Solution p. 19

Exercice 24 (◑☆ Somme de deux dés truqués)
Peut-on truquer deux dés à six faces de manière à ce que la somme des résultats ait une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

Indication p. 16

Exercice 25 (◔☆ Lancés dépendants)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On choisit un nombre uniformément entre 1 et n et on note X le résultat.

On choisit ensuite un nombre uniformément entre 1 et X et on note Y le résultat.

Déterminer $\mathbb{E}[Y]$.

Indication p. 16

Exercice 26 (◔★ Un temps d'arrêt)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On considère un urne contenant n boules dont $n-2$ blanches et 2 noires.

On tire des boules une à une sans remise jusqu'à obtenir une boule noire.

On note T la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de T.
2. Déterminer $\mathbb{E}[T]$.

Indication p. 16 · Solution p. 20

Exercice 27 (◔★ Un calcul de somme de coeffs binomiaux)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

On définit $Y = \frac{1}{1+X}$.

Déterminer l'espérance de Y.

Solution p. 22

Exercice 28 (◔★ Nombre de points fixe I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ (c'est à dire que σ est une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des permutations).

On note X le nombre de points fixes de σ.

Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 29 (◑★ Nombre de points fixe II)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ (c'est à dire que σ est une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des permutations).

On note X_n le nombre de points fixes de σ.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}\frac{1}{k!}$$

Exercice 30 (◔★ Un maximum sans remise)
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire **sans remise** 2 boules.

On note X variable aléatoire du **maximum** entre les deux numéros.

1. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ déterminer
$$\mathbb{P}(X < k).$$
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Indication p. 16 · Solution p. 22

Exercice 31 (◔★ Symétrique d'une binomiale)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

On définit $Y = n - X$.

Déterminer la loi de Y.

Exercice 32 (◔☆ Lectures d'énoncé)
Dans chacun des cas suivants déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

1. On considère un QCM constitué de 20 questions, chaque question a 4 réponses possibles dont exactement 1 correcte. Un élève répond à chaque question « au hasard ». On note X la note totale sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point et qu'une réponse fausse rapporte 0 points.
2. On considère un QCM constitué de 20 questions, chaque question a 4 réponses possibles dont exactement 1 correcte. Un élève répond à chaque question « au hasard ». On note X la note totale sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point et qu'une réponse fausse rapporte $-\frac{1}{2}$ points.
3. Une urne contient 12 boules: 4 rouges, 4 bleues et 4 vertes. On tire avec remise 3 boules et on note X le nombre de boules bleues obtenues.
4. Une urne contient 12 boules: 4 rouges, 4 bleues et 4 vertes. On tire sans remise 3 boules et on note X le nombre de boules bleues obtenues.
5. On considère 3 urnes numérotées 1, 2 et 3 initialement vides et $n \in \mathbb{N}$ boules. Pour chaque boule on choisit de manière uniforme (et indépendante) une urne dans laquelle on la range. On note X le nombre de boules dans l'urne 1.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n dés à 6 faces équilibrés et on note X le nombre de numéros plus grands que 2 obtenus.
7. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère une urne contenant N boules dont 1 boule noire et $N-1$ boules blanches. On tire une à une des boules sans remises jusqu'à obtenir la boule noire. On note X le nombre de tirages effectués avant d'obtenir la boule noire.

Exercice 33 (◑★ Espérance d'une loi hypergéométrique)
Soient $(N,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ tels que pN est entier et $n \in [\![0,N]\!]$.

Soit X suivant une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,N)$ c'est à dire telle que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Indication p. 16

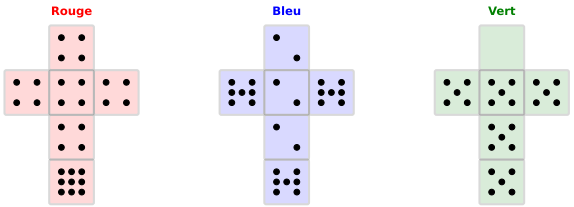
Exercice 34 (◔☆ Presque une binomiale)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.

On considère un pièce pipée ayant une probabilité p de donner `face` et $1-p$ de donner `pile`.

On joue au jeu suivant:
- ▷ on lance (de manière indépendante) la pièce n fois,
- ▷ on note m le nombre de `face` obtenus,
- ▷ si $m > 0$ on gagne m stylos,
- ▷ si $m = 0$ on lance un dé équilibré à n faces et on perd autant de stylos que le résultat obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$. Est-ce une bonne idée de jouer à ce jeu ?

Exercice 35 (◔★ Dés non transitifs)
On considère les dés équilibrés et indépendants suivants



On note X_R, X_B, X_V les résultats des lancers des dés rouge, bleu et vert respectivement.

Calculer $\mathbb{P}(X_R > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_V)$ et $\mathbb{P}(X_V > X_R)$.

Commenter.

Indication p. 16

Exercice 36 (◑★ Une inégalité de concentration à la Hoeffding)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

1. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables i.i.d suivant une loi de Rademacher (c'est à dire que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$) et $c_1, ..., c_n > 0$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k.$$

Montrer que pour tout $y > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq y) \leq \exp\left(-\frac{y^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Indication p. 16

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Mesure image)
Juste vérifier la définition.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Formule du crible)
Travailler par exemple avec des fonction indicatrices en montrant que

$$1-\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k}=\prod_{i=1}^n\left(1-\mathbb{1}_{A_i}\right)$$

puis développer et prendre l'espérance.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Loi hypergéométrique)
On obtient pour $k\in[\![0,n]\!]$

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$$

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Tirage et maximum)
Une est binomial, l'autre hypergéométrique.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Loi hypergéométrique et limite)
Une hypergéométrique tend vers une binomiale.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Probabilités et indicatrice d'Euler)
Il s'agit en fait d'un exercice de dénombrement déguisé.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Indépendance avec soi-même)
On a $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2$.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Une inégalité liée à CS)
Le plus simple est d'interpréter comme la covariance entre $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Alternativement écrire comme une somme et utiliser CS.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Normalisation)
Avec $\mathbb{P}(\{k\})=\alpha k$, écrire $\sum_{k=0}^n \alpha k=1$.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Calcul et indépendance)
Au pire découper en 4.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Copartition)
Par exemple découper en 4.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Une inégalité non évidente)
Passer au ln et utiliser l'inégalité de Karamata (cf TD convexité).

Solution p. 18

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Égalité de Cavalieri ou formule des queues)
Au choix, somme double, transformation d'Abel, réécriture des évènements, etc.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Encore une égalité de Cavalieri)
Faire comme à l'exercice 14.

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Des inégalités déjà connues)

1. IAG (puis espérance)
2. CS
3. convexité
4. IAGH
5. Holder
6. Minkowski
7. Détour

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Quelle inégalité connue)
Par exemple Jensen mais d'autres conviennent.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Une variante non indépendante)
Remarquer que pour tous $x, y > 0$, $\frac{x}{y} \geq \ln(x) - \ln(y) + 1$ ou de manière équivalente, montrer que $\ln(\mathbb{E}[X/Y]) \geq 0$ par convexité.

Indication 19 · Énoncé p. 7 (Comment traiter un maximum)

1. $M_r \leq k$ égal $\bigcap_i (X_i \leq k)$
2. Relier $M_r = k$ à $M_r \leq k$ et $M_r \leq k-1$.
3. Deux possibilités (équivalentes, pourquoi ?) utiliser la formule de Cavalieri ou bien l'espérance comme une somme et effectuer une transformation d'Abel.
4. Sommes usuelles.
5. Vérifier que l'espérance croit avec r. De plus la méthode utilisée ici se généralise. Et méditer Cavalieri/Abel.

Indication 20 · Énoncé p. 8 (De Markov à pleins d'autres inégalités)
Exactement la même preuve que Tchebychev: réécriture d'évènement puis Markov.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Structure euclidienne et trinôme)
Le minimum est atteint en $\mathbb{E}[X]$ pour une valeur de $\mathrm{Var}(X)$.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)
On remarque que quitte à poser $Y = \frac{X-a}{b-a}$ on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$.

1. Étude de trinôme.
2. Utiliser l'inégalité puis la croissance de l'espérance.
3. Utiliser l'inégalité appliquée à l'espérance.

Solution p. 19

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Somme de deux dés truqués)
Passer aux fonctions génératrices et remarquer qu'il y a des racines réelles d'un côté et pas de l'autre.

Indication 25 · Énoncé p. 9 (Lancés dépendants)
Formule des probabilités totales et somme double.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Un temps d'arrêt)
On peut travailler par récurrence (ou télescopage) et conditionnement au tirages précédents.

Alternativement travailler plutôt sur les $\mathbb{P}(T > k)$.

Solution p. 20

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Un maximum sans remise)
1. En notant Y_1 et Y_2 les deux résultats, on a $(X < k) = (Y_1 < k) \cap (Y_2 < k)$ mais attention Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendants !
2. Relier $X = k$ à $X < k+1$ et $X < k$.
3. Calcul de somme explicite. Ou bien utiliser Cavalieri 14.

Solution p. 22

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Espérance d'une loi hypergéométrique)
S'inspirer du calcul de l'espérance d'une binomiale.
- ▷ Effectuer un calcul de somme explicite.
- ▷ Décomposer comme une somme astucieuse de v.as plus simples.

Indication 35 · Énoncé p. 12 (Dés non transitifs)
Au pire faire une table de toutes les possibilités.

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Une inégalité de concentration à la Hoeffding)
1. Attention étudier telle quelle la différence n'est pas le moyen le plus efficace. Au choix:
- ▷ étudier $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x)) - \frac{x^2}{2}$,
- ▷ comparer $\displaystyle\sum_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $\displaystyle\sum_k \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ c'est à dire $(2k)!$ et $2^k k!$.

2. Méthode classique: utiliser l'inégalité de Markov avec la fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$, reconnaître la un produit de fonctions génératrices de Rademacher (d'où ch), majorer par la question précédente puis optimiser un trinôme du second degré en λ.

Solutions

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 5 · Indication p. 15 (Une inégalité non évidente)
Posons

$$N = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(N \geq k).$$

On constate tout d'abord par la formule de Cavalieri et la linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N \geq k) \\ &= \mathbb{E}[N] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).\end{aligned}$$

Soit $m \in [\![1, n]\!]$.

On a alors, de même

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(C_k) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\min(N, m) \geq k) \\ &= \mathbb{E}[\min(N, m)].\end{aligned}$$

De plus soit $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $|I| = m$.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \\ \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} &\leq m\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \leq \min(N, m).$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[\min(N, m)].\end{aligned}$$

Quitte à réordonner supposons désormais que $\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_2) \geq \cdots \geq \mathbb{P}(A_n)$.

On a alors la «majorisation» suivante:

$$\forall m \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(C_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)$$

Comme la fonction ln est concave, par l'inégalité de Karamata (à redémontrer, cf TD convexité) on en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\mathbb{P}(A_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \ln(\mathbb{P}(C_i))$$

et donc par croissance de exp on conclut que

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 9 · Indication p. 15 (Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)

1. Étudions le **trinôme du second degré**

$$f : x \mapsto -x^2 + (a+b)x - ab$$

on a $f(x) = (b-x)(a-x)$ est positif sur $[a,b]$ et admet un maximum en $\frac{b+a}{2}$.

[Détailler et faire un schéma]

Comme de plus $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$ on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [a,b], 0 \leq ax + bx - ab - x^2 \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

2. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto ax + bx - ab - x^2$.

On a démontré que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$$

.

Donc comme

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$$

on a

$$\mathbb{P}(f(X) \geq 0) = 1$$

et donc, par positivité de l'espérance

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq 0$$

c'est à dire,

$$\mathbb{E}\left[(a+b)X - ab - X^2\right] \geq 0$$

i.e, par linéarité de l'espérance,

$$(a+b)\mathbb{E}[X] - ab - \mathbb{E}[X^2] \geq 0$$

ce qui se réécrit

$$\mathbb{E}[X^2] \leq (a+b)\mathbb{E}[X] - ab$$

et donc

$$\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \leq (a+b)\mathbb{E}[X] - ab - \mathbb{E}[X]^2.$$

Donc, par König-Huygens et en factorisant

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) \leq (b - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X] - a)}.$$

Cela se réécrit

$$\mathrm{Var}(X) \leq f(\mathbb{E}[X])$$

et de plus

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$$

d'où par croissance de l'espérance

$$a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$$

c'est à dire $\mathbb{E}[X] \in [a, b]$ et donc

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Finalement on a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) \leq \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 10 · Indication p. 16 (Un temps d'arrêt)

1. Une option (ce n'est pas la seule) est de commencer par déterminer $\mathbb{P}(T > k)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors on a $T > k$ ssi on a obtenu k boules blanches pour les k premiers tirages.

On a donc (comme il s'agit d'un tirage sans remise)

$$\mathbb{P}(T > k) = \frac{\binom{n-2}{k}\binom{2}{0}}{\binom{n}{k}}$$

ce qui peut se simplifier en

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T>k) &= \frac{\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}\\ &= \frac{(n-2)!}{n!}\frac{(n-k)!}{(n-2-k)!}\\ &= \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\\ &= \frac{k^2-(2n-1)k+n(n-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Par conséquent comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T>k-1) - \mathbb{P}(T>k)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k) &= \frac{1}{n(n-1)}(((k-1)^2-k^2)-(2n-1)((k-1)-k)+n(n-1)(1-1))\\ &= \frac{1}{n(n-1)}(-2k+1+(2n-1))\\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

et donc on a la loi de T:

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \mathbb{P}(T=k) = \tfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}.$$

2. On remarque que l'exercice 14 permet de déterminer l'espérance directement à partir des $\mathbb{P}(X>k)$.

Sans utiliser cet exercice, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\right)k\\ &= \frac{2n}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\ &= \frac{2}{n-1}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(3n-(2n+1))}{3(n-1)}\\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{3(n-1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \tfrac{n+1}{3}}.$$

Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 10 (Un calcul de somme de coeffs binomiaux)
Par la formule de transfert on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\frac{1}{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

On cherche alors à calculer cette somme.

Une première méthode serait de remarque que par la formule dite « du capitaine » on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ c'est à dire $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ et de procéder de manière similaire au calcul de $\mathbb{E}[X]$.

Alternativement considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}t^k$$

qui s'écrit aussi par la formule du binôme

$$f : t \mapsto ((1-p)+pt)^n.$$

La primitive de f s'annulant en 0 est d'après la première expression

$$F : t \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{t^{k+1}}{k+1}$$

et d'après la seconde, si $p \neq 0$, (primitive d'une composée par une fonction affine)

$$F : t \mapsto \frac{1}{p}\frac{1}{n+1}\big(((1-p)+pt)^{n+1} - (1-p)^{n+1}\big)$$

par conséquent en évaluant en $t = 1$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{1^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{p}\frac{1}{n+1}\big(1-(1-p)^{n+1}\big)$$

c'est à dire si $p \neq 0$

$$\boxed{\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}}$$

et si $p = 0$, $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] = \frac{1}{1+0} = 1$.

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 11 · Indication p. 16 (Un maximum sans remise)

1. On note tout d'abord que le maximum est compris entre 2 et n, plus précisément

$$X(\Omega) = [\![2, n]\!]$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X<1) = \mathbb{P}(X<2) = 0}.$$

On note Y_1 et Y_2 les deux numéros tirés.

Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

On a $X < k$ si et seulement si $Y_1 < k$ et $Y_2 < k$, c'est à dire si et seulement si on a tiré deux boules de l'ensemble $[\![1, k-1]\!]$.

La probabilité d'un tel évènement est

$$\frac{\binom{k-1}{2}\binom{n-(k-1)}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}$$

d'où

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X < k) = \frac{k^2 - 3k + 2}{n(n-1)}$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X < k) = \frac{k^2-3k+2}{n(n-1)}}$$

2. On a $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X < k+1) - \mathbb{P}(X < k)$$

c'est à dire, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) = \\ \frac{(k+1)^2 - 3(k+1) + 2}{n(n-1)} - \frac{k^2 - 3k + 2}{n(n-1)} \\ = \frac{(2k+1) - 3}{n(n-1)} \\ = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

et donc la loi est

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$$

3. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{n(n-1)}\left(\frac{(2n+1) - 3}{6}\right) \\ &= \frac{2(n+1)(2n-2)}{6(n-1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{2(n+1)}{3}}.$$

On calcule ensuite le moment d'ordre 2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=2}^{n} k^2 \left(\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^2\right)\end{aligned}$$

or (à redémontrer) on a

$$\sum_{k=2}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

et donc on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)n(n+1)}{4} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1\right) \\ &= \frac{2n(n+1)}{n(n-1)}\left(\frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{12}\right) \\ &= \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{6(n-1)}\end{aligned}$$

et comme $3n^2 - n - 2 = (3n+2)(n-1)$ on conclut que

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

Par conséquent, d'après la formule de König-Huygens

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)(n+1)}{9} \\ &= \frac{(n+1)}{18}((9n+6) - (8n+8)) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}.$$