Espaces Euclidiens

Énoncés 2
Lien avec les matrices 2
Matrices symétriques et orthogonales 3
Exemples de produits scalaires 5
Matrices de Gram 8
Polynômes orthogonaux 9
Un zeste de dualité 12
De la norme au produit scalaire 14
Inégalités, optimisation et un peu de ~~chimie~~ géométrie 16
Indications 18
Solutions 24

Énoncés

Dans tout le TD, E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

De plus, sauf mention du contraire, $[a, b]$ est un segment non réduit à un point.

Lien avec les matrices

Exercice 1 (◔★♠ Introduction aux matrices symétriques positives)

1. On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive ssi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top A X \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire positif.

2. On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive ssi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top A X \geq 0 \text{ et } X^\top A X = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire strictement positif.

Indication p. 18

Exercice 2 (◔★ Matrice d'une forme bilinéaire dans une base)

Soit b une forme bilinéaire (quelconque) sur E et $\mathcal{B}$ une base de E de cardinal n.

1. Montrer qu'il existe une et unique matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous $(x, y) \in E^2$, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$,

$$b(x, y) = X^\top A Y.$$

2. Montrer que b est symétrique ssi A est symétrique.

3. Montrer que b est symétrique positive ssi A est symétrique et positive (au sens de l'exercice 1).

4. Montrer que b est symétrique définie positive ssi A est symétrique définie positive (au sens de l'exercice 1).

Indication p. 18

Exercice 3 (◔★ Orthogonalité et symétrie)

On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Indication p. 18

Matrices symétriques et orthogonales

Exercice 4 (◔★ Caractérisation de $O_n(\mathbb{R})$)
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$,
2. $A^\top A = I_n$,
3. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| = \|X\|$,
4. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$.

On appelle groupe orthogonal, noté $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices vérifiant ces propriétés.

Indication p. 18

Exercice 5 (◔★ Groupe orthogonal)
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$, défini à l'exercice 4, est un groupe pour la multiplication matricielle.

Indication p. 18

Exercice 6 (◑★ Décomposition QR)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ tels que

$$A = QR.$$

Indication p. 18

Exercice 7 (◕★ Inégalité de Hadamard)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $(C_1, ..., C_n)$.

Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|.$$

Indication p. 18

Exercice 8 (◔★ Introduction aux matrices de Housholder)
Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul.

On pose

$$H_u = I_n - 2\frac{uu^\top}{\|u\|^2}.$$

Montrer que H_u est une symétrie orthogonale par rapport à un sev que l'on précisera.

Indication p. 18

Exercice 9 (◔★ Caractérisation de la symétrie et de l'antisymétrie)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$A \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle.$$

2. Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, Y\rangle = -\langle X, AY\rangle.$$

3. Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \langle X, AX\rangle = 0.$$

Indication p. 18

Exercice 10 (◔★ Image et noyau de $A^\top A$)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$$
$$\mathrm{Im}(A^\top A) = \mathrm{Im}(A^\top). \mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top).$$

Indication p. 19

Exemples de produits scalaires

Exercice 11 (◔★ Exemples de produits scalaires à poids)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\omega_1, ..., \omega_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \omega(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

3. Soit $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Pour $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \omega_k.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+)$ tq $\omega \neq 0$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t) Q(t) \omega(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Indication p. 19

Exercice 12 (◔★ Encore des exemples de produits scalaires)

1. Soit $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f = 0 \right\}$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 19

Exercice 13 (◔★ Espace ℓ^2)

Soit

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel et que

$$\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

défini un produit scalaire sur E.

Indication p. 19

Exercice 14 (◑☆ Pourquoi est-ce positif)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = f(0)g(1) + f(1)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 19

Exercice 15 (◔☆ Pondération décroissante)
Soit E l'ensemble des suites réelles bornées.

Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on pose

$$\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \frac{1}{2^n}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 19

Exercice 16 (◔☆ Moyenne pondérées et fonctions continues)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

À quelle condition sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ a-t-on

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E ?

Indication p. 19

Exercice 17 (◔☆ Un cas particulier de C-S)
Soit $(\omega_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ une famille de n réels strictement positifs.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \omega_i \omega_j.$$

Indication p. 19

Matrices de Gram

Exercice 18 (◔★ Introduction aux matrices de Gram)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On appelle *matrice de Gram* associée à la famille la matrice

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer $X^\top G(f_1, ..., f_n) Y$ à l'aide d'un produit scalaire.
2. Montrer que $G(f_1, ..., f_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Que dire de la matrice de Gram dans le cas où $(f_1, ..., f_n)$ est orthogonale ? orthonormée ?

Indication p. 19

Exercice 19 (◔★♠ Matrice de Gram et matrices de la famille dans une BON)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que pour toute BON $\mathcal{B}$ de E en posant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, ..., f_n)$$

on a

$$G(f_1, ..., f_n) = A^\top A.$$

Indication p. 20

Exercice 20 (◑★ Matrice de Gram et rang)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\mathrm{rg}(G(f_1, ..., f_n)) = \mathrm{rg}(f_1, ..., f_n).$$

Indication p. 20

Exercice 21 (◑★ Déterminant de Gram)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\det(G(f_1, ..., f_n)) \geq 0.$$

Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Indication p. 20

Exercice 22 (◑☆ Déterminant de Gram et distance)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$ une famille libre de E et $x \in E$. On utilise les notations de l'exercice 18.

Montrer que

$$d(x, \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n))^2 = \frac{\det(G(f_1, ..., f_n, x))}{\det(G(f_1, ..., f_n))}.$$

Indication p. 20

Exercice 23 (◔☆ Une version rigolote de C-S)
Soient $x, y \in E$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix} \geq 0.$$

Indication p. 20

Polynômes orthogonaux

Exercice 24 (◔★ Lagrange sous le prisme orthogonal)
Soient $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et proposer une base orthogonale.

Indication p. 20

Exercice 25 (◔★♠ Existence de polynômes orthogonaux)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormale échelonnée.
2. Montrer qu'il existe une base orthogonale unitaire échelonnée.

Indication p. 20

Exercice 26 (◔★ Orthogonalité et caractère scindé)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et

   $$P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp.$$

   Montrer que P admet au moins n racines dans $[a,b]$.
3. On considère une famille orthogonale échelonnée (cf exercice 25).

   Montrer que tous les polynômes sont scindés à racines simples et que les racines sont distinctes.

Indication p. 20

Exercice 27 (◑★ Orthogonalité et relation de récurrence)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On suppose de plus que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle.$$

Remarque: c'est en particulier le cas si le produit scalaire s'écrit $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

On considère $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ (cf exercice 25).

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$P_{n+2} - (a_n X + b_n)P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X].$$
2. Montrer que
$$P_{n+2} - (a_n X + b_n)P_{n+1} \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp.$$
3. En déduire qu'il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que
$$P_{n+2} = (a_n X + b_n)P_{n+1} + c_n P_n.$$

Indication p. 21

Exercice 28 (◕☆ Formule de Christoffel-Darboux)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle.$$

On considère $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ (cf exercice 25) et on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, α_k le coefficient dominant de X^k.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)^2 = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}(P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

Indication p. 21

Exercice 29 (◕☆ Entralecement de racines)
On considère un produit scalaire comme à l'exercice 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $x_1 < \cdots < x_{n+1}$ les racines de P_{n+1} et $y_1 < \cdots < y_n$ les racines de P_n.

Montrer que

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1}.$$

Indication p. 21

Exercice 30 (◑★ Une famille bien connue de polynômes en lien avec les cosinus)
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'orthonormalisé de Gram-Schmidt pour ce produit scalaire de la base canonique $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 21

Un zeste de dualité

Exercice 31 (◑☆ Vers les formes linéaires continues)
Soit E un espace préhilbertien.

On considère

$$\begin{aligned}\iota : E &\to E^*\\ a &\mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)\end{aligned}$$

1. Montrer que ι est une application linéaire injective.
2. Soit $\varphi \in \mathrm{Im}(\iota)$.

   Montrer que

   $$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, |\varphi(x)| \leq C\ \|x\| \tag{1}$$

3. On suppose que E n'est pas de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(\iota) \neq E$.

Remarque: d'après le théorème de Riesz si E est un espace de Hilbert *alors l'image de ι est l'ensemble des formes linéaires vérifiant la condition (1)*

Indication p. 21

Exercice 32 (◔★ Théorème de représentation de Riesz en dimension finie)
Soit E un espace euclidien.

Montrer que

$$\begin{aligned}\iota : E &\to E^* \\ a &\mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Indication p. 21

Exercice 33 (◔★ Vers Fourier)
Soit $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

Pour $f, g \in E$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\top} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = (t \mapsto \cos(k\omega t))$, $s_k = (t \mapsto \sin(k\omega t))$.

   Montrer que la famille $\left(c_0, (c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une famille orthonormale.

Indication p. 21

Exercice 34 (◔★ Un peu de dualité tordue)
Soit $(f_1, ..., f_p) \in E^p$ une famille libre de vecteurs de E.

Montrer qu'il existe $(f_1^*, ..., f_p^*) \in E^p$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \langle f_i^*, f_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Indication p. 22

Exercice 35 (◔★ Orthogonal et somme/intersection, le cas quelconque)
Soit E un espace pré-hilbertien. Soient F et G deux sevs de E.

Montrer que

1. $(F^\perp)^\perp \supset F$
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
3. $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$
4. **Bonus** Pour chaque inclusion donner un exemple où elle est stricte.

Indication p. 22

Exercice 36 (◔★ Orthogonal et opérations, le cas de la dimension finie)
Soit E un espace euclidien. Soient F et G deux sevs de E.

Montrer que
1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Indication p. 22

Exercice 37 (◑★ Des contre-exemples explicites)
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

   Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que
$$\forall f \in E, \langle f, g\rangle = f(0).$$

Indication p. 22

Exercice 38 (◔★ Adjoint, image et noyau (version matricielle))
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que
$$\mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^\top)$$
$$\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top).$$

Indication p. 22

De la norme au produit scalaire

Exercice 39 (◔★♣ Polarisation)
Soit E un espace pré-hilbertien.

Montrer que pour tous $x, y \in E$,
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
$$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Indication p. 22

Exercice 40 (◑★ L'identité du parallélogramme est essentielle)

1. Soit E un espace pré-hilbertien. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N c'est à dire d'une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

- ▷ $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$,
- ▷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)$,
- ▷ $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ si et seulement si pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Indication p. 22

Exercice 41 (◔★ Projecteur orthogonal et norme)
Soit E un espace pré-hilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|px\| \leq \|x\|$.

Indication p. 22

Exercice 42 (◔☆ Projecteur orthogonal light)
Soit E un espace pré-hilbertien et $x, y \in E$.

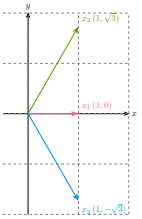
Montrer que

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|x\|^2 \leq \|x + ty\|^2.$$

Indication p. 23

Inégalités, optimisation et un peu de ~~chimie~~ géométrie

Exercice 43 (◔★ Pas de réciproque à Pythagore pour $n > 2$)



Déterminer trois vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$ non deux à deux orthogonaux et tels que

$$\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2.$$

Indication p. 23

Exercice 44 (◔★ La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|AX\|_2^2 \leq \mathrm{tr}(A^\top A)\|X\|_2^2.$$

Indication p. 23 · Solution p. 24

Exercice 45 (◑☆ Régression linéaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer le minimum de

$$(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Indication p. 23

Exercice 46 (◔☆ VSEPR et molécules trigonales)
Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E tels que pour tous $i, j \in [\![1, 3]\!]$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

Indication p. 23

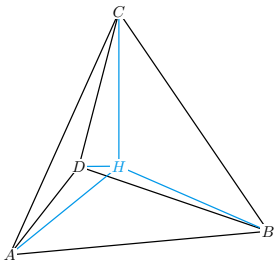
Exercice 47 (◑★ Famille obtusangle maximale)
On dit qu'une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de E est *obtusangle* si pour tous i, j distincts, $\langle u_i, u_j\rangle < 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, ..., u_p)$ une famille obtusangle de E.

Montrer que $p \leq n+1$.

Indication p. 23

Exercice 48 (◔☆ L'angle magique)



On considère un tétraèdre régulier de centre H et de sommets A, B, C et D.

Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{AHB}$.

Indication p. 23

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Introduction aux matrices symétriques positives)
RAS.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Matrice d'une forme bilinéaire dans une base)

1. Procéder par analyse-synthèse. On obtient $A = \big(b(e_i, e_j)\big)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ où $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.
2. Dans un sens remarquer que pour tous i et j, $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$. Dans l'autre que $Y^\top AX = \left(X^\top A^\top Y\right)^\top$.
3. Juste écrire la définition.
4. Juste écrire la définition.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Orthogonalité et symétrie)
Remarquer que $\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(S^\top A^\top)$ et que $\operatorname{tr}(-SA) = -\operatorname{tr}(AS)$.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Caractérisation de $O_n(\mathbb{R})$)
RAS si ce n'est se rappeler de la polarisation et que $\langle E_i, BE_j\rangle = B_{ij}$.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Groupe orthogonal)
Les caractérisations en $A^\top A$, en norme ou produit scalaire conviennent toutes.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Décomposition QR)
Gram-Schmidt sur les colonnes de A.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Inégalité de Hadamard)
Plusieurs options:

- ▷ Par décomposition QR, $|\det A| = |\det Q|\,|\det R| = \prod_{i=1}^n |R_{ii}|$.

  Il reste à étudier les R_{ii}. Mais avec $Q = (U_1 \cdots U_n)$, on a (cf G-S), $R_{ii} = \langle C_i, U_i\rangle$ puis C-S.
- ▷ Avec $S = A^\top A$ on a $S_{ii} = \|C_i\|^2$ et $|\det A|^2 = \det S$.

  Ensuite par exemple par récurrence sur n en écrivant

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & C^\top \\ C & \tilde{S} \end{pmatrix}$$

  et un complément de Schur.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Introduction aux matrices de Housholder)
C'est la symétrie orthogonale par rapport à $\{u\}^\perp$.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Caractérisation de la symétrie et de l'antisymétrie)

1. Montrer que $\langle E_i, ME_j\rangle = (M)_{ij}$.
2. Idem.
3. Sur la diagonale E_i. En dehors $E_i + E_j$.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Image et noyau de $A^\top A$)
Une inclusion est immédiate.

Remarquer que $AX = 0$ ssi $\|AX\|^2 = 0$ et conclure par dimension.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Exemples de produits scalaires à poids)
Dans chacun des cas le caractère bilinéaire symétrique positif est immédiat. Reste le côté défini positif.

1. Une somme de termes positifs est nul ssi tous les termes sont nuls et pour tout k, comme $\omega_k \neq 0$, on a $\omega_k x_k^2 = 0 \Rightarrow x_k = 0$.
2. Ne pas oublier la positivité et la continuité de ωf^2 pour mq $\omega f^2 = 0$. Comme ω ne s'annule jamais conclure.
3. Les sommes sont finies. Pour P et Q fixés se ramener au premier point avec un n bien choisi.
4. Attention ici ω peut s'annuler mais n'est pas identiquement nul. Montrer que P^2 s'annule sur tout intervalle où ω est strictement positif et qu'un tel intervalle non trivial existe. Conclure en utilisant que P est un polynôme.

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Encore des exemples de produits scalaires)
1. Immédiat.
2. Pour le caractère défini, montrer que si $f \in E$ vérifie $f' = 0$ alors $f = 0$.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Espace ℓ^2)
Cf TD séries.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Pourquoi est-ce positif)
Le point important est le caractère (défini) positif.

Utiliser C-S pour majorer $f(0)g(1) + f(1)g(0)$.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Pondération décroissante)
Vérifier que c'est bien défini et attention à la positivité.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Moyenne pondérées et fonctions continues)
Ok pour le caractère bien défini (pq ?),bilinéaire symétrique et positif. Pour le caractère défini montrer que cela est équivalent à la densité de $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $[0,1]$.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Un cas particulier de C-S)
Cela revient à montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \omega_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \omega_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k\right)^2 + \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \omega_i \omega_j.$$

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Introduction aux matrices de Gram)
1. Écrire explicitement et développer. On obtient

$$X^\top G(f_1,...,f_n)Y = \left\langle \sum_j x_j f_j, \sum_i y_i f_i \right\rangle.$$

2. Utiliser la question précédente.

3. Diagonale de coeffs positifs. Identité.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Matrice de Gram et matrices de la famille dans une BON)
Écrire l'expression du p.s dans une BON pour chaque coefficient.

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Matrice de Gram et rang)
Plusieurs méthodes. On peut par exemple traiter le cas où la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre, puis prendre une famille libre maximale.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Déterminant de Gram)
Utiliser par exemple l'exercice 19.

Et (cf tous les autres exos) le déterminant est nul ssi la famille est liée.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Déterminant de Gram et distance)
Poser y le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(f_1,...,f_n)$.

Plusieurs options:

- Calculer les coordonnées de y dans $(f_1,...,f_n)$ en résolvant un système faisant intervenir les matrices de Gram.
- Constater que pour tout i, $\langle x,f_i\rangle = \langle y,f_i\rangle$ et donc par linéarité par rapport à la dernière colonne, comme $\langle x,x\rangle = \|y\|^2 + \|x-y\|^2$ (Pythagore),

$$\begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}\langle f_1,x\rangle\\ \vdots \\ \langle f_n,x\rangle\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \langle x,x\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}\langle f_1,y\rangle\\ \vdots \\ \langle f_n,y\rangle\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \|y\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \|x-y\|^2 \end{vmatrix}$$

et remarquer que le déterminant de gauche est nul par liaison.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Une version rigolote de C-S)
C'est juste C-S ou bien la matrice de Gram de la famille (x,y).

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Lagrange sous le prisme orthogonal)
Pour le caractère défini, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'annulant en n points distincts est nul.

Pour la famille échelonnée, que dire de Lagrange ?

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Existence de polynômes orthogonaux)
Gram-Schmidt.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Orthogonalité et caractère scindé)

1. RAS.

2. Si P a strictement moins de n racines d'ordre impair dans $[a,b]$, en notant $x_1,...,x_r$ ces racines, que dire de

$$\int_a^b P(t)\prod_{i=1}^{r}(t-x_i)\,\mathrm{d}t.$$

3. Application de la question précédente.

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Orthogonalité et relation de récurrence)

1. Système 2×2 échelonné.

2. Utiliser $\langle XP_{n+1},Q\rangle=\langle P_{n+1},XQ\rangle$.

3. En déduire qu'on est dans $\mathrm{Vect}(P_n)$.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Formule de Christoffel-Darboux)
Commencer par faire l'exercice 27 pour obtenir une relation de récurrence.

Puis faire une récurrence à l'aide de la relation de récurrence.

Enfin faire $y\to x$.

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Entralecement de racines)
Faire une récurrence d'ordre 2 en évaluant la formule de récurrence,ou bien interpréter la seconde forme de la formule de Christoffel-Darboux à l'exercice 28 comme un signe de Wronskien.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Une famille bien connue de polynômes en lien avec les cosinus)

1. $\cos([0,2\pi])$ est infini.

2. À part pour le premier ce sont, sans beaucoup de surprise, les polynômes de Tchebychev.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Vers les formes linéaires continues)

1. RAS.

2. CS.

3. Il existe alors une famille libre infinie, donc quitte à gramschmitiser une famille orthonormale infinie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Quitte à la compléter en une base on choisi φ tel que pour tout k, $\varphi(e_k)=k$.

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Théorème de représentation de Riesz en dimension finie)
Le caractère linéaire est immédiat.

Pour l'injectivité, un vecteur est nul ssi il est orthogonal à tout vecteur.

Pour la bijectivité, la dimension entre en jeu.

Indication 33 · Énoncé p. 13 (Vers Fourier)

1. Une fonction périodique nulle sur une période est nulle.

2. Aucun piège, faire le calcul explicite.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Un peu de dualité tordue)
Se ramener au cas E euclidien quitte à considérer $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_p)$.

Plein de méthodes: par récurrence, par base duale puis isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)$, on bien matricielle considérer A la matrice dans une BON et regarder $\left(A^{-1}\right)^\top$.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Orthogonal et somme/intersection, le cas quelconque)

1. Soit $x \in F$. Alors pour tout $y \in F^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$ et donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$.
2. ▷ $\subset$: si $x \in (F+G)^\perp$ alors $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$.
   ▷ $\supset$: si $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$, alors pour tout $y \in (F+G)$, avec $y = y_F + y_G$ on a $\langle x, y\rangle = 0 + 0 = 0$.
3. Au choix utiliser l'inclusion précédente ou remarquer que si $x = x_{F^\perp} + x_{G^\perp}$ alors pour $y \in F \cap G$ on a $\langle x, y\rangle = 0 + 0 * 0$.
4. [Bonus] Pour le contre-exemple regarder par exemple l'exercice 37.

Indication 36 · Énoncé p. 14 (Orthogonal et opérations, le cas de la dimension finie)
Sauf l'inclusion $\supset$ du deuxième point toutes les inclusions peuvent se faire en utilisant les juste les définitions, et ce quelle que soit la dimension (cf 35)

Utiliser la dimension pour la dernière (ou pour simplifier les autres), soit en montrant une inclusion et l'égalité des dimensions, soit en utilisant $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Des contre-exemples explicites)
Déjà vu dans des TDs précédents.

1. Au choix, prendre f raccordée à 0 en 0 ou bien quelque chose de proche d'un Dirac en tout point.
2. Au choix, par exemple, supposer par l'absurde que g existe et montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) = 0$ et que $\int_{-1}^{1} g = 1$.

   Ou bien remarquer que si c'était le cas $F^\perp$ n'est pas $\{0\}$.

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Adjoint, image et noyau (version matricielle))
On peut commencer par constater l'égalité des dimensions.

Remarquer ensuite $\langle Z, A^\top Y\rangle = \langle AZ, Y\rangle$.

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Polarisation)
Al-Kashi

Indication 40 · Énoncé p. 15 (L'identité du parallélogramme est essentielle)

1. Al-Kashi
2. Définir $\langle \cdot, \cdot\rangle$ à l'aide de la formule de polarisation (cf exercice 39).

   Vérifier que c'est un p.s. en utilisant l'identité du parallélogramme.

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Projecteur orthogonal et norme)
Faire un schéma.

Dans un sens c'est Pythagore, dans l'autre à l'aide du schéma prendre $(x, y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ et étudier $t \mapsto \|x + ty\|^2$ (cf la preuve de C-S du cours).

Indication 42 · Énoncé p. 15 (Projecteur orthogonal light)
Al-Kashi et étude de trinôme, cf preuve de C-S.

Indication 43 · Énoncé p. 16 (Pas de réciproque à Pythagore pour $n > 2$)
Chercher par exemple sous la forme $(1, 0)$, $(1, a)$ et $(1, -a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Indication 44 · Énoncé p. 16 (La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Utiliser CS.

Solution p. 24

Indication 45 · Énoncé p. 16 (Régression linéaire)
Il s'agit du projeté de $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ sur $\mathrm{Vect}\Big((x_i)_{1\leq i\leq n}, (1)_{1\leq i\leq n}\Big)$.

Cf aussi les fonctions de deux variables.

Indication 46 · Énoncé p. 16 (VSEPR et molécules trigonales)
Faire un schéma !!

Du schéma se douter qu'il faut montrer par exemple $u_3 = -(u_1 + u_2)$.

Pour le montrer calculer par exemple $\| u_3 + (u_1 + u_2) \|$.

Indication 47 · Énoncé p. 17 (Famille obtusangle maximale)
Procéder par récurrence sur n.

Pour l'hérédité, projeter sur $\{e_p\}^\perp$ et vérifier que la projection est encore obtusangle.

Bonus: trouver une famille obtusangle de cardinal $n + 1$.

Indication 48 · Énoncé p. 17 (L'angle magique)
On obtient un angle de $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, c'est à dire environ 109°, cf cours de Chimie.

Solutions

Solution pour l'exercice 44 · Énoncé p. 16 · Indication p. 23 (La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots x_n \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}\|AX\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \\ &= \mathrm{tr}(A^\top A)\|X\|^2.\end{aligned}$$