Séries

Énoncés 2
Indispensables 2
Thème: Nature par développement asymptotique 6
Thème: Comparaison séries-intégrales 8
Thème: Autour des critères 9
Thème: Autour des séries alternées 11
Thème: Calculs de sommes 13
Thème: Produits de Cauchy 14
Thème: Inégalités et encadrement 15
Thème: Transformations et moyennes 17
Indications 19
Solutions 26

Énoncés

Indispensables

Exercice 1 (◔★ Espaces ℓ^p)
Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^p \text{ CV}\right\}$$

1. Montrer que $\ell^p(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que si $p \leq q$ alors $\ell^p(\mathbb{C}) \subset \ell^q(\mathbb{C})$.

Indication p. 19

Exercice 2 (◔★ Espace ℓ^2)
Pour $u, v \in \ell^2(\mathbb{R})$ (cf exercice 1) on pose

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Indication p. 19

Exercice 3 (◔★ Développements asymptotiques en plus du cahier de calcul)
Déterminer la nature des séries suivantes

- ▷ $\sum_n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- ▷ $\sum_n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$
- ▷ $\sum_n \ln(\text{th}(n))$
- ▷ $\sum_n n\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Indication p. 19

Exercice 4 (◔★♠ Série harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer à l'aide d'une comparaison série-intégrale que

$$H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = H_n - \ln(n).$$

1. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$$

Indication p. 19 · Solution p. 26

Exercice 5 (◔★ Et les produits)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose de plus qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On suppose désormais que $\ell = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - 1$ c'est à dire

$$u_n = 1 + v_n$$

1. Montrer que **si** v_n est de signe constant **alors** $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Indication p. 19

Exercice 6 (◔★♠ Séries de Bertrand)
Déterminer les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

converge.

Indication p. 19 · Solution p. 27

Exercice 7 (◔★ Critère de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que peut-on dire dans le cas $\ell = 1$?

Indication p. 19 · Solution p. 29

Exercice 8 (◔★ Critère de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que peut-on dire dans le cas $\ell = 1$?

Indication p. 19 · Solution p. 30

Exercice 9 (◑★ Critère de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que dire si $\alpha = 1$?

Indication p. 20 · Solution p. 30

Exercice 10 (◔★♠ Transformée d'Abel)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

Commenter.

Exercice 11 (◑★ Critère d'Abel)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que
(i) $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
(ii) $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ converge **absolument**,
(iii) la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors l'hypothèse (ii) est vérifiée.

Commenter.

Indication p. 20

Thème: Nature par développement asymptotique

Exercice 12 (◔☆ Ce n'est pas une série de Riemann)

1. Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

2. Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}}.$$

Indication p. 20 · Solution p. 33

Exercice 13 (◔☆ Développement asymptotique et paramètres)
Déterminer les $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\sum \left(a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}\right)$$

converge.

Indication p. 20 · Solution p. 33

Exercice 14 (◑☆ Un développement asymptotique d'une suite récurrente)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 > 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(u_n).$$

Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{u_n}.$$

Indication p. 20

Exercice 15 (◑★ Un exercice de suite récurrente peu camouflé)
Soit $\alpha > 0$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1[$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^\alpha.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer la nature de $\sum_n u_n$ selon la valeur de α.

Indication p. 20

Exercice 16 (◔★ Encore des discussions de paramètres)
Déterminer selon $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la nature de

$$\sum \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}.$$

Indication p. 21 · Solution p. 34

Exercice 17 (◑☆ Super-Bertrand)
Soit $N \in \mathbb{N}$.

Déterminer les $(\alpha_0, ..., \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha_0}(\ln(n))^{\alpha_1}(\ln(\ln(n)))^{\alpha_2}\cdots\left(\underbrace{\ln(\ln(\cdots\ln),N \text{ fois})(n)}\right)^{\alpha_N}}$$

converge.

Indication p. 21

Thème: Comparaison séries-intégrales

Exercice 18 (◔★ Équivalent de ζ en 1)
Pour $s > 1$ on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Justifier la bonne définition de ζ.
2. Montrer que

$$\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

Indication p. 21 · Solution p. 35

Exercice 19 (◔★ Un développement asymptotique parmi d'autres)
Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

Indication p. 21 · Solution p. 36

Exercice 20 (◑☆ Suite sur puissance de somme partielle)
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
2. On suppose désormais que $\sum u_n$ diverge.
   - ▷ Montrer que pour tout $\alpha > 1$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
   - ▷ Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Indication p. 21 · Solution p. 38

Thème: Autour des critères

Exercice 21 (◔★ Un cas particulier de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\alpha}$.
2. En déduire une CNS sur α pour la convergence de $\sum u_n$.

Indication p. 21 · Solution p. 39

Exercice 22 (◑★ Condensation de Cauchy)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** de réels positifs.

Montrer que les séries

$$\sum_k u_k \quad \text{et} \quad \sum_k 2^k u_{2^k}$$

sont de même nature.

Indication p. 21 · Solution p. 40

Exercice 23 (◑☆ Un conséquence très partielle)

1. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ positive telle que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \neg\left(u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ positive et **décroissante**.

   Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication p. 22

Exercice 24 (◕☆ Une récurrence)
Soient $0 < a < b$ deux réels.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $a < b + 1$.
2. Déterminer dans ce cas la somme de $\sum u_n$.

Indication p. 22

Exercice 25 (◔☆ Encore un peu de marge et Riemann)
Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \sim \alpha \ln(n)$.

Montrer que la série

$$\sum_n e^{-u_n}$$

- converge si $\alpha > 1$,
- diverge si $\alpha \leq 1$.

Indication p. 22

Thème: Autour des séries alternées

Exercice 26 (◔★ Un calcul de somme par découpe détaillé)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Montrer que
- ▷ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- ▷ $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Indication p. 22 · Solution p. 41

Exercice 27 (◑☆ Trois méthodes pour adapter un classique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{47} \\ -46 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{47} \end{cases}.$$

1. Montrer que

$$\sum_{n} \frac{u_n}{n}$$

converge.

2. Déterminer sa somme.

Indication p. 22

Exercice 28 (◔★ Séries pas vraiment alternées)
Déterminer les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$$

converge.

Indication p. 22 · Solution p. 43

Exercice 29 (◔★ Encore des séries pas vraiment alternées)
Déterminer selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la nature de

$$\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Indication p. 22 · Solution p. 44

Exercice 30 (◔★ Juste Abel)
Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Indication p. 23

Exercice 31 (◔★ Un alternement)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{b}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Déterminer les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sum u_n$ converge.

Indication p. 23 · Solution p. 45

Exercice 32 (◑☆ Un regroupement)
Déterminer la nature de la série

$$\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}.$$

Indication p. 23

Thème: Calculs de sommes

Exercice 33 (◑★ Un calcul de somme)
Déterminer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k}.$$

Indication p. 23 · Solution p. 45

Exercice 34 (◔★ Développement asymptotique)
Déterminer un développement asymptotique de

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}.$$

Indication p. 23 · Solution p. 46

Exercice 35 (◑☆ Un calcul de somme explicite)
Soit $p \geq 2$ un entier.

Montrer que

$$\sum_{n\geq p} \frac{1}{\binom{n}{p}}$$

est convergente et déterminer sa somme.

Indication p. 23

Thème: Produits de Cauchy

Exercice 36 (◔☆ Attention à la CVA pour Cauchy)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

ainsi que

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

1. Montrer que les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent.
2. Montrer que $\sum_n c_n$ diverge.

Indication p. 23

Exercice 37 (◕☆ Théorème de Mertens)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que

- ▷ la série $\sum_n a_n$ converge **absolument**,
- ▷ la série $\sum_n b_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Montrer que la série $\sum_n c_n$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right).$$

Indication p. 23

Thème: Inégalités et encadrement

Exercice 38 (◔☆ Réarrangement et séries divergentes)
Soit $\sigma \in S(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

diverge.

Indication p. 24

Exercice 39 (◔★ Il y a toujours plus petit)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum u_n$ diverge.

Montrer qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $v_n = o_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge.

Indication p. 24

Exercice 40 (◔☆ Un vers deux)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tq

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} + u_{2k+1} \geq u_k.$$

Montrer que

$$\sum_k u_k$$

diverge.

Indication p. 24 · Solution p. 47

Exercice 41 (◑☆ Carré sur le suivant)
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \in [4x_0, +\infty]$$

Indication p. 24 · Solution p. 48

Exercice 42 (◉☆ Inégalité de Carleman)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}}\leq e\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Indication p. 24 · Solution p. 48

Exercice 43 (◕★ Un peu d'arithmétique et de combinatoire)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note le n-ième nombre premier p_n.

On suppose par l'absurde que la série

$$\sum_n\frac{1}{p_n}$$

converge.

1. Montrer qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{1}{p_k}<\frac{1}{2}.$$

On fixe dans la suite un tel $m\in\mathbb{N}$ et on note pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$G(N)=|\{n\in[\![1,N]\!]\mid\exists k\geq m,p_k\mid n\}|$$

1. Montrer que

$$G(N)\leq\frac{N}{2}.$$

2. Montrer que

$$N-G(N)\leq\left(\frac{\ln(N)}{\ln(2)}+1\right)^m$$

3. Conclure.

Indication p. 24

Thème: Transformations et moyennes

Exercice 44 (◔★ Gendarmes et séries)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles (non nécessairement positives).

On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq u_n \leq d_n.$$

Montrer que **si** $\sum g_n$ et $\sum d_n$ convergent **alors** $\sum u_n$ converge.

Indication p. 24

Exercice 45 (◔★ C'est exactement Césàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrer si la série

$$\sum_n u_n$$

converge alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n (1-\frac{k}{n})u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Indication p. 24

Exercice 46 (◑☆ Triangularité et équivalent dans le cas convergent)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que

$$\sum_n u_n$$

converge absolument.

Montrer que

$$\sum_n \left(\frac{\sum_{k=0}^n k u_k}{n^2}\right)$$

converge.

Indication p. 25

Exercice 47 (◔☆ Petite transformation)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Indication p. 25

Exercice 48 (◕☆ Si pas de CVA tout est possible)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $\sigma \in S(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} = x.$$

Indication p. 25

Exercice 49 (◔★ Un exemple de développement asymptotique)
Déterminer la nature de

$$\sum_n \sin\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n \pi\right).$$

Indication p. 25 · Solution p. 50

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Espaces ℓ^p)

1. C'est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pour le montrer utiliser par exemple l'inégalité de Minkowski.
2. Utiliser que en particulier $u_n \to 0$. On remarque qu'une telle propriété serait fausse dans le cas L^p.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Espace ℓ^2)

Le point important est la bonne définition. Par IAG $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Développements asymptotiques en plus du cahier de calcul)

Faire un DL.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Série harmonique)

1. RAS
2. DL
3. Relier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Solution p. 26

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Et les produits)

ln

Indication 6 · Énoncé p. 4 (Séries de Bertrand)

Pour $\alpha \neq 1$ comparer $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ et $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Pour $\alpha = 1$ effectuer une comparaison série-intégrale.

Solution p. 27

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Critère de d'Alembert)

1. Au choix conclure par divergence grossière ou comparer avec une série géométrique de raison $q \in]1, \ell[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
2. Comparer avec une série géométrique de raison $q \in]\ell, 1[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Riemann.

Solution p. 29

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Critère de Cauchy)

1. Au choix conclure par divergence grossière ou comparer avec une série géométrique de raison $q \in]1, \ell[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
2. Comparer avec une série géométrique de raison $q \in]\ell, 1[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Riemann.

Solution p. 30

Indication 9 · Énoncé p. 5 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Soit $\beta \in]\alpha, 1[$ (par exemple $\frac{\alpha+1}{2}$). Comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $\beta \in]1, \alpha[$ (par exemple $\frac{\alpha+1}{2}$). Comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Bertrand.

Solution p. 30

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Critère d'Abel)
Pour démontrer le critère d'Abel utiliser … une transformée d'Abel ! (exercice 10).

Remarquer ensuite que $a_n B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (tend vers 0 fois bornée), et que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\ (a_{k+1} - a_k)B_k| \leq \|B\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a_{k+1} - a_k|}.$$

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Ce n'est pas une série de Riemann)
Faire un équivalent simple.

Solution p. 33

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Développement asymptotique et paramètres)
Effectuer un développement asymptotique de en $O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est suffisant pour conclure.

Solution p. 33

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Un développement asymptotique d'une suite récurrente)
Soit utiliser en adaptant la méthode vue en TD sur les DA pour obtenir un développement asymptotique de u_n en $n\ln(n)$.

Soit faire un bootstrap pour obtenir $u_n = O(n\ln(n))$.

Conclure par Bertrand.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Un exercice de suite récurrente peu camouflé)
Pour montrer la bonne définition puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ faire une étude de suite récurrente 100% automatique (intervalle stable, monotonie, etc.).

Puis encore une étude de suite récurrente classique pour obtenir un équivalent, étudier

$$\frac{(u_n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(u_{n+1})^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

puis Cesàro.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Encore des discussions de paramètres)
Si $\alpha > 0$, Bertrand.

Si $\alpha = 0$, Riemann.

Si $\alpha < 0$, Riemann.

Solution p. 34

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Super-Bertrand)
Commencer par traiter l'exercice 6.

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Équivalent de ζ en 1)
Encadrer par comparaison série-intégrale.

Solution p. 35

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Un développement asymptotique parmi d'autres)
Faire exactement comme l'exercice 4

Solution p. 36

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Suite sur puissance de somme partielle)

1. Équivalent.
2. Commencer par traiter le cas intégral, c'est à dire étudier $\int_0^x \frac{f(t)}{F(x)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (où $F' = f$) quand $x \to +\infty$.

   Puis essayer de répliquer la preuve en étudiant $\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha}$ et l'équivalent intégral.

Solution p. 38

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Un cas particulier de Raabe-Duhamel)

1. Remarquer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $\sum\left(\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) + \alpha\frac{1}{n}\right)$ converge. Utiliser ensuite une somme télescopique et le fait que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.
2. Séries de Riemann.

Solution p. 39

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Condensation de Cauchy)
Remarquer que pour tout k,

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} u_i \leq 2^k u_{2^k}.$$

Solution p. 40

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Un conséquence très partielle)

1. Par exemple faire des paquets grands de valeurs petites.

2. Par critère de condensation de Cauchy, cf exercice 22, ou équivalent on a $2^k u_{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis monotonie.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Une récurrence)

1. Étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et utiliser l'exercice 9.

2. Poser $S_n^0 = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_n^1 = \sum_{k=0}^n k u_k$. Puis déterminer une relation de récurrence sur $\binom{S_n^0}{S_n^1}$.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Encore un peu de marge et Riemann)
Prendre β entre 1 et α et comparer à Riemann.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Un calcul de somme par découpe détaillé)

1. Classique.

2. $\sum_k (-1)^{k-1} a_k = 2\sum_{k \text{ pair}} a_k - \sum_k a_k$

3. Faire le dev asymptotique, passer à la limite car tout converge.

Solution p. 41

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Trois méthodes pour adapter un classique)
Il y a au moins trois méthodes:

- ▷ Utiliser le critère de d'Abel, cf exercice 11.
- ▷ Regrouper par paquets de 47, faire un DL et trouver un équivalent en constante sur n^2.
- ▷ Faire intervenir des bouts de séries harmoniques, cf 26, on remarque que cette méthode donne aussi la somme.

Indication 28 · Énoncé p. 12 (Séries pas vraiment alternées)

- ▷ Pour $\beta > \alpha$, déterminer un équivalent positif.
- ▷ Pour $\alpha > \beta$, l'équivalent n'est pas positif. Effectuer un développement de la forme alterné + positif.

Solution p. 43

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Encore des séries pas vraiment alternées)
Faire un développement asymptotique à un ordre suffisant pour avoir un signe.

Solution p. 44

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Juste Abel)
Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors Abel.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Un alternement)
On peut commencer par traiter les cas $(a,b) = (1,1)$ et $(a,b) = (1,-1)$.

Constater ensuite que les suites 2-périodiques forment un espace vectoriel de dimension 2.

Solution p. 45

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Un regroupement)
Regrouper les termes par paquets de la forme $[\![k^2, (k+1)^2[\![$.

Indication 33 · Énoncé p. 13 (Un calcul de somme)
S'inspirer de l'exercice 26.

Solution p. 45

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Développement asymptotique)
Faire un équivalent de $\exp\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$.

Solution p. 46

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Un calcul de somme explicite)
La convergence est immédiate.

Pour la somme, il faut se ramener à une somme télescopique. On peut étudier une fraction rationnelle ou bien sinon étudier $\frac{1}{\binom{n-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{n}{p-1}}$. On obtient $\frac{p}{p-1}$.

Indication 36 · Énoncé p. 14 (Attention à la CVA pour Cauchy)
1. CSSA
2. Montrer que pour tout n et $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{2}{n}$ et en déduire une divergence grossière.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Théorème de Mertens)
Effectuer une transformée d'Abel pour faire apparaître les sommes partielles de b et faire une preuve « à la Cesàro ».

Indication 38 · Énoncé p. 15 (Réarrangement et séries divergentes)
Par exemple adapter la série harmonique ou tout simplement une inégalité de réordonnement sur les sommes partielles.

Indication 39 · Énoncé p. 15 (Il y a toujours plus petit)
Considérer par exemple, en s'inspirant des intégrales, $v_n = \frac{u_n}{\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

Indication 40 · Énoncé p. 15 (Un vers deux)
Regrouper entre deux puissance de deux.

Solution p. 47

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Carré sur le suivant)
Par IAG, $\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_k - x_{k+1})$.

Solution p. 48

Indication 42 · Énoncé p. 16 (Inégalité de Carleman)
On pourra utiliser l'IAG avec des poids $\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

Alternativement, faire l'IAG sur $(k+1)a_k$.

Solution p. 48

Indication 43 · Énoncé p. 16 (Un peu d'arithmétique et de combinatoire)

1. Le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Remarquer que
$$G(N) \leq \sum_{k \geq m} \left\lfloor \frac{N}{p_k} \right\rfloor.$$
3. On a $N - G(N)$ est le nombre d'entiers produits uniquement des p_k pour $k < m$.

   Remarquer que choisir un tel entier revient à choisir les valuations p_k-adiques qui sont plus petites que $\frac{\ln(N)}{\ln(p_k)}$. Cf arithmétique/combinatoire.
4. Absurde.

Indication 44 · Énoncé p. 17 (Gendarmes et séries)
On a $0 \leq d_n - u_n \leq d_n - g_n$.

Indication 45 · Énoncé p. 17 (C'est exactement Césàro)
Remarquer que $\left(\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la moyenne de Césàro des sommes partielles.

Indication 46 · Énoncé p. 17 (Triangularité et équivalent dans le cas convergent)
Faire une interversion de sommes sur une somme partielle et à l'aide par exemple d'une comparaison série/intégrale, montrer que, à k fixé, $\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n^2}$ est au pire en $\frac{1}{k}$.

Indication 47 · Énoncé p. 18 (Petite transformation)
Remarquer que

- ▹ les deux suites positives et bien définies,
- ▹ pour tout n, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ (inversion d'homographie),
- ▹ si $\sum u_n$ converge alors en particulier $u_n \to 0$,
- ▹ si $u_n \to 0$ alors $v_n \sim u_n$.

Indication 48 · Énoncé p. 18 (Si pas de CVA tout est possible)
Pour $x \in \mathbb{R}$, l'idée est de prendre les termes pairs (donc positifs) das l'ordre tant que la somme partielle est inférieure à x et les termes impairs (donc négatifs) dans l'ordre tant que la somme partielle est supérieure à x.

Il reste à montrer que cela donne bien une bijection de $\mathbb{N}$ et à vérifier la limite.

On remarque que l'on peut adapter la preuve pour une limite infinie (en « bougeant » le réel cible) et même obtenir des comportements plus complexes.

Indication 49 · Énoncé p. 18 (Un exemple de développement asymptotique)
Calculer

$$\sum_n \sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n \pi\right).$$

Solution p. 50

Solutions

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 3 · Indication p. 19 (Série harmonique)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

donc par croissance de l'intégrale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$$

et donc pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \frac{1}{1} + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq H_n - \ln(n) \leq 1$$

et en particulier

$$\boxed{H_n - \ln(n) = O_{n\to+\infty}(1)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par Développement Limité

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et en particulier

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = O_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)}.$$

3. comme $2 > 1$ on a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). D'où (comparaison de séries à termes positifs), $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ CVA et donc $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ CV (en fait on avait même un signe par l'équivalence $u_{n+1} - u_n$ par les calculs de la question précédente).

Donc (série télescopique) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En notant γ sa limite on a donc bien

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 4 · Indication p. 19 (Séries de Bertrand)
On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\alpha < 1$.

Posons $\tilde{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2}$.

Alors

$$\alpha < \tilde{\alpha} < 1.$$

Par croissances comparées, $n^\alpha \ln(n)^\beta = o_{n\to+\infty}(n^{\tilde{\alpha}})$ et donc

$$\frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$$

Or comme $\tilde{\alpha} < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}$ diverge (série de Riemann).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ diverge.}}$

▷ Si $\alpha > 1$.

Posons $\tilde{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2}$.

Alors

$$1 < \tilde{\alpha} < \alpha.$$

Par croissances comparées, $n^{\tilde{\alpha}} = o_{n\to+\infty}\big(n^\alpha \ln(n)^\beta\big)$ et donc

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}\right)$$

Or comme $\tilde{\alpha} > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}$ converge (série de Riemann).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge.}}$

▷ Si $\alpha = 1$

Soit $f_\beta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$.

Alors f_β est dérivable, pour tout $x > 1$, $f'_\beta(x) = \frac{x\beta\frac{1}{x}\ln(x)^{\beta-1} - \ln(x)^\beta}{(x\ln(x)^\beta)^2} = \frac{\ln(x)^{\beta-1}(\beta - \ln(x))}{(x\ln(x)^\beta)^2}$ et donc f_β est décroissante à partir d'un certain rang A (plus précisément à partir de e^β).

Par comparaison série intégrale pour tout $n \geq A$,

[Comparaison série intégrale à rédiger si nécessaire]

$$\int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t + \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \sum_{k=A}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \frac{1}{A(\ln A)^\beta} + \int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t.$$

▷ **Calcul de l'intégrale**

Si $\beta \neq 1$ alors

$$\int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t = \int_A^n \ln'(t)(\ln t)^{-\beta}\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_A^n = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln A)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

et si $\beta = 1$ alors

$$\int_A^n \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_A^n \ln'(t)\ln(t)^{-1}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_A^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)).$$

▷ **Si $\beta = 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)) + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

et que $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)) + \frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

par comparaison (la nature ne dépendant pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$

▷ **Si $\beta < 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \leq \sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$$

et que, comme $1-\beta > 0$, $\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

par comparaison (la nature ne dépendant pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ diverge.}}$

Remarque: il suffirait de traiter le cas $\beta = 1$ pour conclure à la divergence dans le cas $\beta < 1$. Mais ici la comparaison série/intégrale permet même d'avoir un équivalent en $\frac{1}{1-\beta}\ln(n)^{1-\beta}$ en $+\infty$.

▷ **Si $\beta > 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{A\ln(A)^\beta} + \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

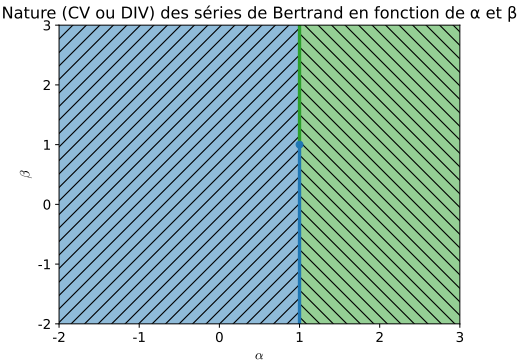
et que, comme $1-\beta < 0$, $\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en particulier est majoré.

Donc en tant que série à termes positifs et bornée, $\sum_{n\geq A} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge, et donc (la nature ne dépend pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ converge.}}$

▷ Conclusion

- ▷ Si $\alpha < 1$ alors DIV.
- ▷ Si $\alpha > 1$ alors CV.
- ▷ Si $\alpha = 1$ alors
  - ▷ Si $\beta < 1$ alors DIV.
  - ▷ Si $\beta > 1$ alors CV.
  - ▷ Si $\beta = 1$ alors DIV.

Ce qui est résumé par le schéma à droite.



Solution pour l'exercice 7 · Énoncé p. 4 · Indication p. 19 (Critère de d'Alembert)

1. Supposons $\ell > 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$1 < q < \ell.$$

D'où APCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors par produit d'inégalités positives, pour tout $n \geq n_0$,

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{k=n_0}^{n-1} q$$

c'est à dire (produit télescopique)

$$u_n \geq u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Comme $q > 1$ la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

2. Supposons $\ell < 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$\ell < q < 1.$$

D'où APCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors par produit d'inégalités positives, pour tout $n \geq n_0$,

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} q$$

c'est à dire (produit télescopique)

$$0 < u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Comme $q < 1$, la série $\sum_n q^n$ converge et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

3. Si $\ell = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais la nature de la série $\sum u_n$ dépend de α (est divergente si $\alpha \leq 1$ et convergente si $\alpha > 1$).

Solution pour l'exercice 8 · Énoncé p. 4 · Indication p. 19 (Critère de Cauchy)

1. Supposons $\ell > 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$1 < q < \ell.$$

D'où APCR $(u_n)^{\frac{1}{n}} > q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n > q^n.$$

Comme $q > 1$ la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

2. Supposons $\ell < 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$\ell < q < 1.$$

D'où APCR $(u_n)^{\frac{1}{n}} < q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors pour tout $n \geq n_0$,

$$0 < u_n \leq q^n.$$

Comme $q < 1$, la série $\sum_n q^n$ converge et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

3. Si $\ell = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ on a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais la nature de la série $\sum u_n$ dépend de α (est divergente si $\alpha \leq 1$ et convergente si $\alpha > 1$).

Remarque: le critère de Cauchy implique le critère de d'Alembert.

En effet **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, **alors** $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$, d'où par Cesàro et somme télescopique $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$ d'où $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par conséquent en notant le critère de d'Alembert $\mathcal{H}_A \to \mathcal{C}$ et celui de Cauchy $\mathcal{H}_C \to \mathcal{C}$, on a $\mathcal{H}_A \Rightarrow \mathcal{H}_C$.

D'où $(\mathcal{H}_C \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{H}_A \Rightarrow \mathcal{C})$.

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 5 · Indication p. 20 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Supposons $\alpha < 1$.

Soit $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.

Alors

$$\alpha < \beta < 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

d'où $n\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha > -\beta$.

En particulier il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \geq -\frac{\beta}{n}$$

et donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \geq -\beta \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est à dire en notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série harmonique, pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_n) \geq \left(\ln\left(u_{n_0}\right) + \beta H_{n_0-1}\right) - \beta H_{n-1}$$

Or $H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1)$ et donc il existe une constante K_{n_0} tq pour tout $n \geq n_0$, $H_{n-1} \leq \ln(n) + K_{n_0}$.

Par conséquent il existe $C_{n_0} \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \geq n_0, \ln(u_n) \geq -\beta\ln(n) + C_0$$

d'où (croissance de l'exponentielle),

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{1}{n^\beta} e^{C_0}.$$

Comme $\beta < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ diverge (série de Riemann), par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

2. Supposons $\alpha > 1$.

Soit $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.

Alors

$$1 < \beta < \alpha.$$

On a (on refait ici le même calcul que précédemment mais ce n'est pas nécessaire)

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $n\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha < -\beta$.

En particulier il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \leq -\frac{\beta}{n}$$

et donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \leq -\beta \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est à dire en notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série harmonique, pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_n) \leq \left(\ln\left(u_{n_0}\right) + \beta H_{n_0-1}\right) - \beta H_{n-1}$$

Or $H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1)$ et donc il existe une constante K_{n_0} tq pour tout $n \geq n_0$, $H_{n-1} \geq \ln(n) + K_{n_0}$.

Par conséquent il existe $C_{n_0} \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \geq n_0, \ln(u_n) \leq -\beta\ln(n) + C_0$$

d'où (croissance de l'exponentielle),

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\beta} e^{C_0}.$$

Comme $\beta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge (série de Riemann), par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

3. Si $\alpha = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, avec pour tout n,

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-\beta}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-\beta}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)^{-\beta}\\ &= 1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ dépend de β (divergente si $\beta \leq 1$ et convergente si $\beta > 1$, cf exercice 6).

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 6 · Indication p. 20 (Ce n'est pas une série de Riemann)

1. Pour n au voisinage de $+\infty$ on a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$$

d'où par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ diverge.

2. Pour n au voisinage de $+\infty$ on a

$$n^{\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} = e^{\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\ln(n)} = e^{2\ln(\ln(n))} = \ln(n)^2$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n^{1+\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}} = \frac{1}{n\ln(n)^2}.$$

Il s'agit donc d'une série de Bertrand (cf exercice 6) et par comparaison série/intégrale, comme $2 > 1$, la série converge.

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 6 · Indication p. 20 (Développement asymptotique et paramètres)
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}$$

On a le développement limité pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b+c\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(a+\frac{a}{2n}-\frac{a}{8n^2}+b+c-\frac{c}{2n}-\frac{c}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (a+b+c)\sqrt{n}+\frac{a-c}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a+c}{8}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent:

- Si $a+b+c\neq 0$ alors on a l'équivalent $u_n\sim(a+b+c)\sqrt{n}$ et donc la série diverge grossièrement.
- Si $a+b+c=0$ et $a-c\neq 0$, alors on a l'équivalent $u_n\sim\frac{a-c}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et $a-c$ est de signe constant. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série diverge.
- Si $a+b+c=0$ et $a-c=0$ alors on a l'équivalent $u_n\sim-\frac{a+c}{8}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or la série $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et $a+c$ est de signe constant. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série converge.

On conclut que la série converge ssi $a+b+c=0$ et $a-c=0$.

En résolvant le système on obtient que la série CV ssi

$$\boxed{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Solution pour l'exercice 16 · Énoncé p. 7 · Indication p. 21 (Encore des discussions de paramètres)

- **Si $\alpha<0$**

  Alors, comme $n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a

  $$\ln(1+n^\alpha)=n^\alpha+o(n^\alpha)$$

  et donc

  $$\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right).$$

  Comme pour tout $n\geq 1$, $\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$ et $\sum\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ sont de même nature.

  Par séries de Riemann, la série converge ssi $\beta-\alpha>1$.
- **Si $\alpha=0$**

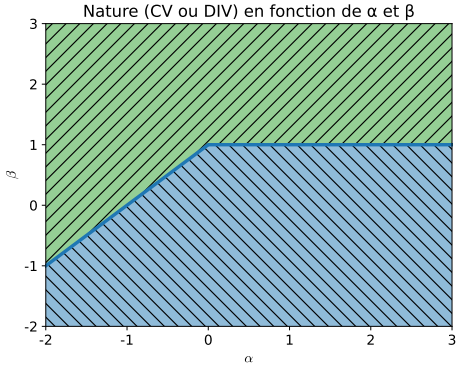
  Alors pour tout n, $\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{\ln(2)}{n^\beta}$ et par séries de Riemann, la série converge ssi $\beta>1$.
- **Si $\alpha>0$**

  Alors comme $n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on a

  $$\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{\ln(n^\alpha)+\ln(1+n^{-\alpha})}{n^\beta}=\alpha\frac{\ln(n)}{n^\beta}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^\beta}\right).$$

Comme pour tout $n \geq 1$, $\frac{\ln(n)}{n^\beta} \geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^\beta}$ sont de même nature.

Par séries de Bertrand (cf exercice 6), la série converge ssi $\beta > 1$.



En conclusion:

- Pour $\alpha < 0$,
  - si $\beta - \alpha > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta - \alpha \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha = 0$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha > 0$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.

Solution pour l'exercice 18 · Énoncé p. 8 · Indication p. 21 (Équivalent de ζ en 1)

1. Pour $s > 1$ la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge comme série de Riemann.

2. Soit $s > 1$.

$$f_s :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est strictement décroissante (car de dérivée $x \mapsto -\frac{s}{x^{s+1}}$ strictement négative).

Soit $k \geq 1$. On a

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$1 \times \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t \leq 1 \times \frac{1}{k^s}$$

et donc pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant et par relation de Chasles on obtient pour tout $n \geq 2$,

$$\int_1^n \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{1^s} + \int_1^n \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t.$$

Et finalement ($s \neq 1$),

$$\frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq 1 + \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, comme $1-s<0$ on a

$$\frac{n^{1-s}}{1-s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme $s>0$, $\frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par définition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \zeta(s)$.

Par Passage à la Limite des Inégalités Larges on a donc

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

et ce pour tout $s>1$.

En particulier, par encadrement, on a

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}}.$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 8 · Indication p. 21 (Un développement asymptotique parmi d'autres)
Remarque: le plan pour ce genre de problématique est souvent le suivant:

- Une comparaison série intégrale permet d'obtenir un $O(1)$,
- pour obtenir les termes suivants (jusqu'au $\text{cste} + o(1)$), on utilise une méthode de bootstrap en écrivant à chaque étape une suite comme une série télescopique pour utiliser un théorème de comparaison.
- **Comparaison série/intégrale**

  Soit

  $$\begin{aligned} f :]1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

  alors f est dérivable de dérivée,

  $$\forall x>1, f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

  D'où le tableau de variations suivant,

x	1	e^1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

par conséquent, pour tout $k \geq 3$,

$$\forall x \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

D'où, par croissance de l'intégrale, pour tout $k \geq 3$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$

et donc pour tout $k \geq 4$,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où pour tout $n \geq 3$,

$$f(n) + \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(3).$$

Comme $\sum_{k=3}^{n} f(k) = \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x + O(1)$.

Or (primitive de $u' \times u$), pour tout $n \geq 3$,

$$\int_3^n \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(n)^2 - \ln(3)^2).$$

Et donc finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + O_{n\to+\infty}(1)}.$$

▹ **Convergence de l'écart par somme télescopique**

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln(n)^2.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant les DL_2 tronqués $\ln(1+h) = h + O_{h\to 0}(h^2)$, $(1+h)^2 = 1 + 2h + O_{h\to 0}(h^2)$,

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n-1} &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n-1)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2\left(1 - \frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2 - \frac{1}{2}\ln(n)^2 \times 2\frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{\ln(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge absolument, donc converge.

Par série télescopique on a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge c'est à dire il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 8 · Indication p. 21 (Suite sur puissance de somme partielle)

1. Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$, bien défini (et strictement positif) par convergence de la série.

Alors on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \frac{u_n}{S^\alpha}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum u_n$ on en déduit $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge}}$.

2. Dans le cas intégral on a $\int_0^x \frac{f(t)}{F(x)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ se calcule explicitement en $\left[\frac{F(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^x$ si $\alpha \neq 1$ et en $[\ln(F(x))]_0^x$ si $\alpha = 1$. D'où on déduit la nature.

- ▷ Si $\alpha \leq 0$, comme APCR $S_n \geq 1$, APCR $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq u_n$ et comme $\sum u_n$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.
- ▷ Si $\alpha > 1$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante comme série de terme général positif.

  $]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$

  De plus $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante.

  Soit $n \geq 2$, on a donc

$$\forall t \in [S_{n-1}, S_n], \frac{1}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{S_{n-1}^\alpha}$$

d'où par croissance de l'intégrale (et $S_n - S_{n-1} = u_n$),

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha}.$$

D'où par sommation, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}^\alpha}.$$

En particulier comme $1-\alpha < 0$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \frac{S_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{S_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{S_1^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

Les sommes partielles sont donc majorées, et comme la série est à termes positifs, elle **converge**.

▷ Si $\alpha = 1$.

Si $\frac{u_n}{S_n} \to .\neg 0$ alors la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement.

Si $\frac{u_n}{S_n} \to 0$ alors, pour n au voisinage de l'infini

$$\begin{aligned}\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) &= \ln(S_n) - \ln(S_n - u_n)\\ &= -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)\\ &\sim \frac{u_n}{S_n}\end{aligned}$$

par comparaison de séries à termes positifs $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$ sont de même nature.

Or $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ diverge en tant que série télescopique d'une suite divergente.

D'où $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

▷ Si $\alpha < 1$, alors comme pour tout n,

$$\frac{u_n}{S_n} \leq \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

On a donc bien montré que, dans le cas $\sum u_n$ diverge, $\boxed{\text{pour tout } \alpha > 1,\ \sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}}$ converge et $\boxed{\text{pour tout } \alpha \leq 1,\ \sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ diverge}}$.

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 9 · Indication p. 21 (Un cas particulier de Raabe-Duhamel)

1. On a, comme $\ln(1+h) = h + O(h \to 0)(h^2)$, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où

$$\left((\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) - \left(-\frac{\alpha}{n}\right)\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où par comparaison de séries à termes positifs $\sum_n |(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) - (-\frac{\alpha}{n})|$ converge, d'où $\sum_n \left((\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) - (-\frac{\alpha}{n})\right)$ converge absolument donc converge.

Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) + \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ell + o_{n\to+\infty}(1).$$

Or on sait (cf exercice 4) qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.

Par conséquent (somme télescopique) il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(u_n) = -\alpha \ln(n) + \kappa + o_{n\to+\infty}(1)$$

Comme $e^{1+o(1)} = 1 + o(1)$ on en déduit

$$u_n = \frac{e^\kappa}{n^\alpha}(1 + o(1))$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}}$$

où $C = e^\kappa$.

2. Comme $\left(\frac{C}{n^\alpha}\right)$ est de signe strictement constant par théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{C}{n^\alpha}$ sont de même nature.

Par séries de Riemann on en déduit que la série $\boxed{\text{converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha \leq 1}$.

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 9 · Indication p. 21 (Condensation de Cauchy)
Soit $k \in \mathbb{N}$.

Par décroissance de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall i \in [\![2^k, 2^{k+1} - 1]\!], u_{2^{k+1}} \leq u_i \leq u_{2^k}$$

et donc par somme (comme $2^{k+1} - 1 - 2^k + 1 = 2^k$),

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} u_i \leq 2^k u_{2^k}.$$

D'où pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

c'est à dire (Chasles)

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_{2^k} \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

▷ Si $\sum_k 2^k u_{2^k}$ diverge

Alors comme $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (série divergente à termes positifs) par comparaison on a $\sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Et en particulier $\sum_k u_k$ diverge.

▷ Si $\sum_k 2^k u_{2^k}$ converge

Alors en particulier il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k} \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^N - 1$ (par exemple $N = \lceil \log_2(n+1) \rceil$).

Alors comme tous les termes sont positifs,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k} \leq M.$$

Par conséquent les sommes partielles sont majorées et comme la série est à termes positifs, elle converge.

On a donc bien montré que les séries $\boxed{\sum_k u_k \text{ et } \sum_k 2^k u_{2^k} \text{ sont de même nature}}$.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 11 · Indication p. 22 (Un calcul de somme par découpe détaillé)

1. Critère Spécial des Séries Alternées et cf exercice 4. [À rédiger].

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k\in[\![1,2n]\!]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{2n} &= \sum_{k\in[\![1,2n]\!]} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$2\sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} = H_{2n} - S_{2n}$$

et comme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

on en déduit

$$S_{2n} = H_{2n} - 2\frac{1}{2}H_n$$

i.e

$$\boxed{S_{2n} = H_{2n} - H_n}$$

3. Par conséquent pour n au voisinage de $+\infty$,

$$S_{2n} = \big(\ln(2n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\big) - \big(\ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\big)$$

d'où $(\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n))$,

$$S_{2n} = \ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).$$

De plus (comme $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} = \ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Par conséquent, les termes extraits pairs et impairs étant convergents et de même limite on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}.$$

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 12 · Indication p. 22 (Séries pas vraiment alternées)
On remarque que si $\alpha = \beta$, la série n'est pas définie.

- ▷ Si $0 \geq \alpha > \beta$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ d'où une divergence grossière.
- ▷ Si $0 \geq \beta > \alpha$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$ d'où une divergence grossière.
- ▷ Si $\beta > \alpha$ et $\beta \geq 0$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$ d'où, par comparaison de séries à termes positifs, convergence si $\beta > 1$ et divergence si $\beta \leq 1$.
- ▷ Si $\beta < \alpha$ et $\alpha > 0$ alors on a le développement limité

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\frac{1}{1 + (-1)^n n^{\beta-\alpha}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\big(1 - (-1)^n n^{\beta-\alpha} + o_{n\to+\infty}\big(n^{\beta-\alpha}\big)\big) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right).\end{aligned}$$

En posant pour tout n, $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ on obtient

Comme $\alpha > 0$, par critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

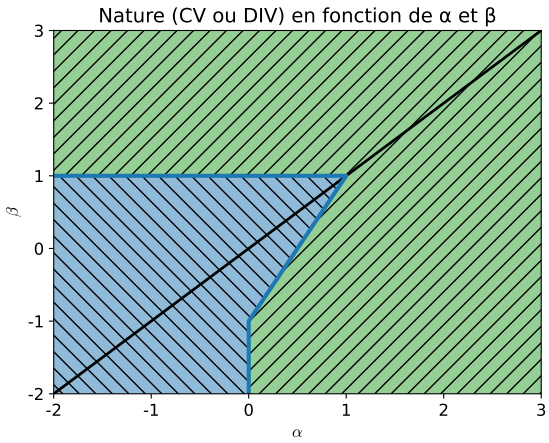
Par conséquent $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ est de même nature que $\sum v_n$.

(La somme de deux séries CV est CV et d'une série CV et d'une série DIV est DIV).

Or

$$v_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}.$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $2\alpha - \beta > 1$.



En conclusion:

- Pour $\beta > \alpha$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha > \beta$,
  - si $\alpha \leq 0$ alors la série diverge,
  - si $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta > 1$ alors la série converge.
  - si $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta \leq 1$ alors la série diverge.

Ce qui est résumé par le schéma à droite.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 12 · Indication p. 22 (Encore des séries pas vraiment alternées)
Comme $\alpha > 0$ on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'où par $\mathrm{DL}_2(0)$ de ln

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ c'est à dire

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

Comme $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Par conséquent, $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Or on a vu que $v_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ (qui est positif).

Donc par séries de Riemann et comparaison de série à termes positifs, la série converge si $\alpha > \frac{1}{2}$ et diverge si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 12 · Indication p. 23 (Un alternement)

▷ **Cas $(a,b) = (1,1)$**

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Par séries de Riemann ($\frac{1}{2} < 1$) la série diverge.

▷ **Cas $(a,b) = (1,-1)$**

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par critère spécial des séries alternées, la série converge.

▷ **Cas général**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{a-b}{2}\right)\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(À méditer pourquoi).

Par conséquent comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge $\sum_n u_n$ est de même nature que $\sum_n \frac{a+b}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc si $a+b=0$ alors la série converge, sinon la série diverge.

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 13 · Indication p. 23 (Un calcul de somme)

Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} = \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

$$T_{2n} = \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

D'où

$$S_{2n} = T_{2n} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

et comme

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln(2)}{j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\ln(j)}{j}\right)\end{aligned}$$

on en déduit

$$S_{2n} = T_{2n} - \ln(2)H_n - T_n.$$

Or on a (exercices 4 et 19), il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (constante d'Euler) et $C \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}H_n &= \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\\ T_n &= \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \frac{1}{2}\ln(2n)^2 - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + o_{n\to+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{2}{2}\ln(2)\ln(n) - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + o_{n\to+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2)^2 - \gamma\ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).\end{aligned}$$

Comme de plus $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(2)^2 - \gamma\ln(2)}.$$

Solution pour l'exercice 34 · Énoncé p. 13 · Indication p. 23 (Développement asymptotique)
On a,

$$\begin{aligned}k^{\frac{1}{k}} &= e^{\frac{\ln(k)}{k}}\\ &= 1 + \frac{\ln(k)}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2\right)\\ &= 1 + \frac{\ln(k)}{k} + O\left(\frac{\ln(k)^2}{k^2}\right).\end{aligned}$$

Remarque: l'idée est souvent d'effectuer un DL du terme général, jusqu'au premier terme dont la série converge absolument.

▷ En particulier $k^{\frac{1}{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où par théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + o_{n\to+\infty}(n)}.$$

▹ En posant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = k^{\frac{1}{k}} - 1$, c'est à dire

$$k^{\frac{1}{k}} = 1 + v_k$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} &= \sum_{k=1}^{n}(1+v_k)\\ &= n + \sum_{k=1}^{n} v_k.\end{aligned}$$

On cherche donc un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} v_k$.

On a

$$v_k = \frac{\ln(k)}{k} + O\left(\frac{\ln(k)^2}{k^2}\right)$$

Comme $\frac{\ln(k)^2}{k^2} = O\Big(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\Big)$, et que $\frac{3}{2} > 1$, la série $\sum \frac{\ln(k)^2}{k^2}$ converge et par comparaison $\sum_k \Big(v_k - \frac{\ln(k)}{k}\Big)$ converge absolument donc converge.

Par conséquent il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \ell + o_{n\to+\infty}(1).$$

Or (cf exercice 19) il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

On conclut donc qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + \tfrac{1}{2}\ln(n)^2 + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 15 · Indication p. 24 (Un vers deux)
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$T_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} = \sum_{k=2^{n+2}}^{2^{n+2}-1} u_k = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (u_{2k} + u_{2k+1}) \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k = T_n.$$

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Comme $T_0 > 0$, on a en particulier, pour tout $n \geq \mathbb{N}$, $T_n \geq T_0 > 0$.

D'où en particulier (divergence grossière)

$$\sum_{k=0}^{N} T_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

c'est à dire (regroupement par paquets)

$$\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc en particulier $\boxed{\text{la série diverge}}$.

Solution pour l'exercice 41 · Énoncé p. 15 · Indication p. 24 (Carré sur le suivant)
On a,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (x_k - 2x_{k+1})^2 \geq 0$$

par conséquent pour tout k,

$$x_k^2 - 4x_k x_{k+1} + 4x_{k+1}^2 \geq 0$$

i.e comme $x_{k+1} > 0$,

$$\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_k - x_{k+1})$$

en sommant pour tout $n \in \mathbb{N}$, par somme télescopique

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_0 - x_{n+1})$$

et comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on obtient bien par passage à la limite des inégalités larges

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4x_0}.$$

Solution pour l'exercice 42 · Énoncé p. 16 · Indication p. 24 (Inégalité de Carleman)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} &= \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}(k+1)a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}\left(\prod_{k=0}^{n}(k+1)a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de majorer $\frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}$, autrement dit de minorer $(n+1)!$. On va montrer que

$$(n+1)! \geq \left(\frac{n+2}{e^1}\right)^{n+1}.$$

Par inégalité de convexité de ln on a pour tout $k \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^1$.

On en déduit, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^1(k+1).$$

En effectuant le produit pour k allant de 1 à $n+1$, par télescopage, on trouve

$$\begin{aligned}(n+2)^{n+2} &= \prod_{k=1}^{n+1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \\ &< \prod_{k=1}^{n+1} e^1(k+1) = e^{n+1}(n+2)!.\end{aligned}$$

En divisant par $n+2$, on obtient $(n+2)^{n+1} < e^{n+1}(n+1)!$, c'est à dire

$$(n+1)! > \frac{(n+2)^{n+1}}{e^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{e^1}\right)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}} &= \exp\left(-\frac{1}{n+1}\ln((n+1)!)\right) \\ &\leq \exp(-\ln(n+2)+1) \\ &= \frac{e^1}{n+2}.\end{aligned}$$

Ainsi, finalement,

$$\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{e^1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k.$$

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, par somme double,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{e^1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &\leq e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\frac{1}{k+1}\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}a_k\\ &\leq e^1\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.\end{aligned}$$

Par conséquent (série à termes positifs), la série est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq e\sum_{n=0}^{+\infty}a_n}.$$

Solution pour l'exercice 49 · Énoncé p. 18 · Indication p. 25 (Un exemple de développement asymptotique)
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n\in 2\mathbb{Z}$$

(par exemple en remarquant que c'est 2 fois la partie entière dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, ou en développant par binôme, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}2^k+0$, ou par récurrence linéaire d'ordre 2).

Avec pour $n\in\mathbb{N}$ avec $k_n\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n=2k_n$$

on obtient

$$\sin\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n\pi\right)=\sin\left((2k_n)\pi-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right)=-\sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right).$$

De plus comme $|1-\sqrt{2}|<1$, on a

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

et donc

$$|\sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right)|\sim|\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi|.$$

Par conséquent

$$|\sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)| \sim |\pi\big(1-\sqrt{2}\big)|^n.$$

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)$ et $\sum \big(1-\sqrt{2}\big)^n$ ont même nature.

Or $|1-\sqrt{2}|<1$ donc $\sum|\big(1-\sqrt{2}\big)^n|$ converge.

Donc $\sum \sin\Big(\big(1-\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)$ converge absolument et par conséquent $\boxed{\text{la série converge}}$.