Déterminants

Énoncés 2
Indispensables 2
Thème: Autour de l'application déterminant 5
Thème: Déterminants classiques 10
Thème: comatrice 17
Thème: autour de Vandermonde 18
Thème: déterminants et blocs 24
Thème: encore des calculs en vrac 28
Thème: déterminants et arithmétique 31
Thème: déterminants et dénombrement 33
Thème: Wronskien et Cie 34
Indications 36
Solutions 52

Énoncés

Dans tout le TD $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$).

De plus, sauf mention du contraire $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

Indispensables

Exercice 1 (◔★♣ Det et automorphisme de corps)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}.$$

Indication p. 36

Exercice 2 (◔★♠ Polynôme caractéristique)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que l'application $t \mapsto \det(A - tI_n)$ est polynomiale.

Déterminer :

- son degré,
- son coefficient dominant et son coefficient constant,
- son coefficient d'ordre $n-1$.

Indication p. 36

Exercice 3 (◔★♣ Déterminant triangulaire par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(B).$$

Indication p. 36

Exercice 4 (◔★♣ Déterminant de Vandermonde)
Rappeler et redémontrer l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 36

Exercice 5 (◔★♠ Inversibilité et changement de corps)
Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{L}).$$

Indication p. 36

Exercice 6 (◔★ Similitude et changement de corps)

1. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose $A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Soient $M_1, M_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que M_1 et M_2 sont semblables comme matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que M_1 et M_2 sont semblables comme matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication p. 36

Exercice 7 (◔★ Matrices de rang 1)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(A + \lambda I_n) = \lambda^{n-1} \operatorname{tr}(A) + \lambda^n$.

Indication p. 36

Exercice 8 (◔★♣ Groupe spécial linéaire)
On note

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.

Indication p. 36

Exercice 9 (◔★♠ Densité des matrices inversibles: version première année)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang les éléments de la suite $\left(A + \frac{1}{p} I_n\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont inversibles.
2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

   Montrer que

   $$\left(A + \frac{1}{p} I_n\right)_{i,j} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}.$$

3. Commenter.

Indication p. 36

Exercice 10 (◑★♠ Générateurs de SL_n)
On rappelle que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de déterminant 1.

Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvections.

Indication p. 37

Exercice 11 (◔★ Déterminant de matrice antisymétrique)
Montrer que **si** n est impair **alors** toute matrice antisymétrique de taille $n \times n$ est non inversible.

Indication p. 37

Les exercices suivants sont classés par thèmes arbitraires.

Il est par ailleurs essentiel de faire les trois grands classiques suivants

- le rang de la comatrice 45,
- l'utilisation du complément de Schur pour les déterminants par blocs 60,
- l'étude des matrices inversibles sur un anneau commutatif 80.

Thème: Autour de l'application déterminant

Exercice 12 (◑★ Gradient du déterminant)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\begin{aligned}\varphi_H : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \det(A+tH)\end{aligned}$$

1. Pourquoi φ_H est-elle dérivable ?
2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer $\varphi'_H(0) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$.
3. Montrer que de manière générale,

$$\varphi'_H(0) = \operatorname{tr}\big((\mathrm{Com}(A))^\top H\big)$$

Indication p. 37

Exercice 13 (◔★♠ Polynôme et déterminant: le cas rang quelconque)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \det(A+tB)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(B)$.

Indication p. 37

Exercice 14 (◑★ Dimension de l'ev des formes alternées)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E.

1. Montrer que $\Lambda^p(E)$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\dim(\Lambda^p(E))$.

Indication p. 38

Exercice 15 (◔★ Déterminant d'une somme ?)
On suppose que $n \geq 2$.

Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, **si** $A \neq O_n$ **alors**

$$\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Indication p. 38

Exercice 16 (◔☆ Des matrices inversibles partout dans toutes les directions)
Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $tA + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ sauf au plus n éléments.

Indication p. 38

Exercice 17 (◑★ Un lien entre déterminant et trace)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Montrer que pour toute famille $(x_1, ..., x_n) \in E^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(x_1, ..., x_{j-1}, u\big(x_j\big), x_{j+1}, ..., x_n\big) = \mathrm{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 38

Exercice 18 (◔★♠ Dérivée d'une forme multilinéaire)
Soient $C_1, ..., C_n \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(C_1(t), ..., C_n(t)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\big(C_1(t), ..., C_{j-1}(t), C_j'(t), C_{j+1}(t), ..., C_n(t)\big).$$

Indication p. 38

Exercice 19 (◑☆ Un cas très particulier de déterminant de somme)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que $\mathrm{rg}(B) = 1$.

Montrer que

$$\det(A + B) = \det(A) + \mathrm{tr}\big(\mathrm{Com}(A)^\top B\big).$$

Indication p. 38

Exercice 20 (◔★ Déterminant d'une symétrie)
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

Déterminer $\det(s)$ en fonction des dimensions des espaces caractéristiques.

Indication p. 38

Exercice 21 (◔☆ Déterminant de la transposée)
Déterminer le déterminant de l'application transposée

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^\top. \end{aligned}$$

Indication p. 38

Exercice 22 (◔☆ Symétrisation et antisymétrisation)
Soient $p \in \mathbb{N}$ et f une forme p-linéaire sur E.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \hat{f} : E^p &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_p\big) &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f\Big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\Big) \end{aligned}$$

est une forme p-linéaire symétrique.

2. Montrer que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E^p &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_p\big) &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f\Big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\Big) \end{aligned}$$

est une forme p-linéaire antisymétrique.

Indication p. 39

Exercice 23 (◑★ Morphismes vers un groupe abélien)
Soit G un groupe **abélien**.

Soit $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to G$ un morphisme de groupes.

Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{K}^* \to G$ un morphisme de groupes tel que

$$\varphi = \psi \circ \det.$$

Indication p. 39

Exercice 24 (◑★ Multiplicativité et inversibilité)
Soit $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) \neq 0\}.$$

Indication p. 39

Exercice 25 (◕★ D'autres caractérisations du déterminant)
Commencer par traiter l'exercice 24.

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow f(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A).$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, f\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right) = \lambda.$$

Indication p. 39

Exercice 26 (◔★ Le début de l'étude du permanent)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *permanent* de A le scalaire

$$\mathrm{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n) &\to \mathbb{K}\\ (C_1, ..., C_n) &\mapsto \mathrm{Perm}(C_1, ..., C_n)\end{aligned}$$

est n-linéaire symétrique.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et Q une matrice de dilatation ou de transposition.

Exprimer $\mathrm{Perm}(AQ)$ en fonction de $\mathrm{Perm}(A)$ et de Q.

3. Que dire des transvections ?

4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\mathrm{Perm}(A^\top) = \mathrm{Perm}(A)$.

5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Montrer que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \mathrm{Perm}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{Perm}\big(A_{ij}\big)$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \mathrm{Perm}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{Perm}\big(A_{ij}\big).$$

Indication p. 39

Exercice 27 (◕☆ Un produit extérieur sans le dire)

1. Soient φ une forme linéaire sur E et f une forme p-linéaire alternée sur E.

Montrer que

$$\begin{aligned}\varphi \wedge f : E^{p+1} &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_{p+1}\big) &\mapsto \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_i) f\big(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{p+1}\big)\end{aligned}$$

est une forme $p+1$-linéaire alternée sur E.

2. Soient f une forme p-linéaire alternée sur E et g une forme q-linéaire alternée sur E.

On note

$$S_{p,q} = \big\{\sigma \in S_{p+q} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\big\}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned}f \wedge g : E^{p+q} &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_{p+q}\big) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma) f\big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\big) g\big(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)}\big)\end{aligned}$$

est une forme $p+q$-linéaire alternée.

Indication p. 40

Thème: Déterminants classiques

Exercice 28 (◑★ Matrice de Toeplitz tridiagonale)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En déduire une expression explicite de Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication p. 40

Exercice 29 (◕★ Liberté de fonctions et évaluations)
Soient Ω un ensemble non vide.

1. Soit $(f_1, ..., f_n, f_{n+1}) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^{n+1}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, et $B \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une ligne.

Montrer que

$$\forall x \in \Omega, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & f_n(x) \\ b_1 & \cdots & b_n & f_{n+1}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{n+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n).$$

2. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^n$.

Montrer que

$$(f_1, ..., f_n) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_1, ..., x_n) \in \Omega^n, \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^n$. Conclure que

$$\mathrm{rg}(f_1, ..., f_n) = \max_{(x_1, ..., x_n) \in \Omega^n} \left(\mathrm{rg}\left(f_i(x_j)\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \right).$$

Indication p. 40

Exercice 30 (◔★ Règle de Sarrus)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

et faire un schéma.

2. Dans le cas où A est inversible, expliciter les coefficients de l'inverse de A en fonction des coefficients de A.

Indication p. 40

Exercice 31 (◑★ Déterminant circulant)
Soient $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(J)$.

2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie par,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (\Omega)_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}.$$

Montrer que $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et calculer $\Omega^{-1} J \Omega$.

3. En déduire $\det(A)$.

Indication p. 40

Exercice 32 (◔★ Déterminant et matrice compagnon)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré n.

On appelle **matrice compagnon de P** la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_n - C_P) = P(\lambda).$$

Indication p. 40

Exercice 33 (◔★ Déterminant du produit matriciel)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On considère

$$\begin{aligned} g_A : \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

Déterminer $\det(g_A)$.

Indication p. 40

Exercice 34 (◔☆ Déterminant de la conjugaison)
Soit E de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$.

Calculer le déterminant de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ v &\mapsto uvu^{-1}. \end{aligned}$$

Indication p. 40

Exercice 35 (◔★ Matrice antidiagonale)
Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Calculer le déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Indication p. 40

Exercice 36 (◑★ Matrice antidiagonale: polynôme caractéristique)
Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{K}$ la valeur de

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_n\right).$$

Indication p. 41

Exercice 37 (◕★ Grand classique: Résultant)
Soient $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$ deux polynômes.

On appelle le résultant de P et Q, noté $\mathrm{Res}(P, Q)$ le déterminant

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & \vdots & b_q & b_{q-1} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_p & \ddots & \vdots & 0 & b_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{p-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 & 0 & \cdots & b_q \end{vmatrix}$$

On considère l'application linéaire φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] &\to \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

1. Exprimer $\mathrm{Im}(\varphi)$ à l'aide de $P \wedge Q$.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
3. En déduire

$$\mathrm{Res}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow (P \wedge Q \neq 1)$$

Indication p. 41

Exercice 38 (◔★ Discriminant d'un polynôme)
Commencer par traiter l'exercice 37.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que P admet au moins une racine multiple ssi $\text{Res}(P, P') = 0$.
2. Dans les cas $P = aX^2 + bX + c$ et $P = X^3 + pX + q$, donner l'expression explicite de $\text{Res}(P, P')$ en fonction des coefficients de P.
3. Commenter.

Indication p. 41

Exercice 39 (◔★ Autour de la matrice d'Attila I)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}.$$

Indication p. 41

Exercice 40 (◑☆ Autour de la matrice d'Attila II)
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

Indication p. 41

Exercice 41 (◑☆ Des Huns très bien camouflés ou le déterminant de Hurwitz)
Soient $(a,c) \in \mathbb{K}^2$ et $(b_1,...,b_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c & c & \cdots & c \\ a & b_2 & c & \cdots & c \\ a & a & b_3 & \ddots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f : t \mapsto \det(A+tJ)$ est une fonction affine.

2. Déterminer $\det(A)$.

Indication p. 41

Exercice 42 (◔★♠ Déterminant d'une matrice de permutation)
Soit $\sigma \in S_n$.

On note $P_\sigma = \left(\delta_{j=\sigma(i)}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\det(P_\sigma)$.

Indication p. 41

Exercice 43 (◑☆ Déterminant en L)
Soit $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Indication p. 41

Exercice 44 (◕☆ Matrice anticirculante)
Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(A) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} P(\zeta)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Indication p. 41

Thème: comatrice

Exercice 45 (◔★♠ Rang de la comatrice)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.
3. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

Indication p. 42

Exercice 46 (◔★ Comatrice de la comatrice)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

Montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

Indication p. 42

Exercice 47 (◔☆ Comatrice et transposée)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\mathrm{Com}(A^\top) = \mathrm{Com}(A)^\top$.

Indication p. 42

Exercice 48 (◑★ Comatrice et produit)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

Indication p. 42

Exercice 49 (◑☆ Image de la comatrice)
Déterminer l'image de l'application comatrice c'est à dire

$$\{\mathrm{Com}(A), A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}.$$

Indication p. 42

Thème: autour de Vandermonde

Exercice 50 (◔★♣ Vandermonde par changement de base)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

1. Montrer que pour toute famille $(P_0, ..., P_{n-1})$ exactement échelonnée et unitaire on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

2. En déduire l'expression du déterminant de Vandermonde.

Indication p. 42

Exercice 51 (◔★ Vandermonde par variation d'un coefficient)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une fonction polynomiale de degré n.

   Comme $\mathbb{K}$ est infini on identifie cette fonction à un polynôme P. Quel est son coefficient dominant ?
2. Déterminer n racines distinctes de P.
3. En déduire une nouvelle démonstration de l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 43

Exercice 52 (◑★ Vandermonde et coefficient dominant de Lagrange)
Soit $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On pose V_n la matrice de Vandermonde

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et V_{n-1} la matrice extraite

$$V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}.$$

1. Que dire de $\det(V_n)$ si les $\left(x_j\right)_{1 \leq j \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ?

   On suppose désormais qu'ils sont deux à deux distincts.
2. Déterminer la n-ème ligne de $(V_n)^{-1}$.
3. En déduire que

$$\det(V_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \det(V_{n-1}).$$

4. En déduire une nouvelle preuve de la valeur des déterminants de Vandermonde.

Indication p. 43

Exercice 53 (◔★ Vandermonde par pivot)
Soit $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

On pose V_n la matrice de Vandermonde

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & \cdots & (x_1 - x_n)x_1^{n-3} & (x_1 - x_n)x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & \cdots & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire une nouvelle preuve du déterminant de Vandermonde.

Indication p. 43

Exercice 54 (◑★ Vandermonde par translation)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & x_1 + t & \cdots & (x_1 + t)^{n-2} & (x_1 + t)^{n-1} \\ 1 & x_2 + t & \cdots & (x_2 + t)^{n-2} & (x_2 + t)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n + t & \cdots & (x_n + t)^{n-2} & (x_n + t)^{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est dérivable et calculer φ'.
2. En déduire une nouvelle démonstration de l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 43

Exercice 55 (◑★ Vandermonde à trou)
Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

Soient $(\lambda_0, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^{j-1} & \lambda_0^{j+1} & \cdots & \lambda_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{i-1} & \cdots & \lambda_{i-1}^{j-1} & \lambda_{i-1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{i-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_{i+1} & \cdots & \lambda_{i+1}^{j-1} & \lambda_{i+1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{i+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{j-1} & \lambda_{n-1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indication p. 43

Exercice 56 (◕★ Déterminant de Cauchy)
Soient $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1,...,b_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_i + b_j \neq 0$.

On cherche à calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

1. Que dire si les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ou si les $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ? On suppose dans la suite que ces familles sont deux à deux distinctes.

2. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ et

$$F_n(X) = \frac{1}{X+a_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{X+a_i}.$$

Montrer que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ F_n(b_1) & F_n(b_2) & \cdots & F_n(b_n) \end{vmatrix}$$

3. On note L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange en b_n relativement à $(b_1,...,b_{n-1},b_n)$, c'est à dire

$$L_n = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X-b_j)}{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}.$$

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{L_n(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X+a_i)}.$$

4. Conclure que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i_1<i_2}\left(a_{i_2}-a_{i_1}\right)\prod_{j_1<j_2}\left(b_{j_2}-b_{j_1}\right)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}.$$

Indication p. 43

Exercice 57 (◕☆ Il y a du Vandermonde derrière)
Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{C}^n$.

1. Déterminer

$$\det\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^{k-1}\beta_j^{n-k}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$$

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_1+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_1+\beta_n)^{n-1} \\ (\alpha_2+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_2+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_2+\beta_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_n+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_n+\beta_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)(\beta_i-\beta_j).$$

Indication p. 44

Exercice 58 (◑☆ Vandermonde puis un produit)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_2x_3...x_n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_1x_3...x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_1x_2...x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Indication p. 44

Exercice 59 (◑☆ Encore des Vandermonde peu intéressants)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$.

1. Déterminer

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

2. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & \lambda^n \end{vmatrix}.$$

Indication p. 44

Thème: déterminants et blocs

Exercice 60 (◔★♠ Complément de Schur)
Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

Indication p. 44

Exercice 61 (◔★ Complément de Schur et calcul de déterminant)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

Montrer que

- Si $\det(A) \neq 0$ alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

- Si $\det(D) \neq 0$ alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$

Indication p. 44

Exercice 62 (◑★ Blocs et matrices 2x2)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B).$$

2. Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det(A+iB)\det(A-iB).$$

Indication p. 44 · Solution p. 52

Exercice 63 (◔★ Blocs 2x2 de même taille et qui commutent)
Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que A est **inversible** et que A et C **commutent**.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Indication p. 44

Exercice 64 (◑☆ Blocs 2x2 de même taille et qui commutent, bis)
Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que A et C **commutent**.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Indication p. 45

Exercice 65 (◑☆ Complément de Schur et inverse par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

On suppose que $\det(A) \neq 0$ et $\det(D - CA^{-1}B) \neq 0$ et on pose $\Delta = (D - CA^{-1}B)$.

Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}\big(I_p + B\Delta^{-1}CA^{-1}\big) & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Commenter.

Indication p. 45

Exercice 66 (◑★ Identité de Sylvester (pour les déterminants))
Soient $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det(I_n + AB) = \det\big(I_p + BA\big).$$

Indication p. 45

Exercice 67 (◑☆ Un cas particulier de déterminant par blocs)
Soit $A \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \lambda & L \\ C & A \end{vmatrix} = \lambda \det(A) - L\mathrm{Com}(A)^\top C.$$

Indication p. 45

Exercice 68 (◔★ Déterminant et opérations du pivot par blocs)
Soient $A_{11} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}), A_{12} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A_{21} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A_{22} \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

1. Soit $\Lambda \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \Lambda A_{11} & \Lambda A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det(\Lambda) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

2. Soit $B \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + BA_{11} & A_{22} + BA_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

3. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{vmatrix} = (-1)^{pq} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Indication p. 45

Exercice 69 (◕☆ Déterminant par blocs qui commutent: cas général)
Soient $\left(A_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \left(\mathrm{M}_p(\mathbb{K})\right)^{[\![1,n]\!]^2}$ des matrices **qui commutent deux à deux**.

On pose $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

1. On suppose que $A_{nn} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{nn}) \det\Big(\left(A_{ij} - A_{in}A_{nn}^{-1}A_{nj}\right)_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}\Big).$$

2. Montrer que

$$\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} \left(A_{i\sigma(i)}A_{nn} - A_{in}A_{n\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

3. Conclure que

$$\det(A) = \det\left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}\right).$$

Indication p. 46

Exercice 70 (◑☆ Un cas particulier de Cauchy-Binet)
Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{K})$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq 2}} \in \mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det(AB) = \sum_{1\leq j<k\leq p} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{j1} & b_{j2} \\ b_{k1} & b_{k2} \end{vmatrix}.$$

Indication p. 46

Exercice 71 (◕☆ Cauchy-Binet)
Soient $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Pour $K \subset [\![1,p]\!]$ on note $A_K = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n\\k\in K}}$ et $B_K = \left(b_{kj}\right)_{\substack{k\in K\\1\leq j\leq n}}$. Montrer que

$$\det(AB) = \sum_{\substack{K\subset[\![1,p]\!]\\|K|=n}} \det(A_K)\det(B_K).$$

Indication p. 46

Thème: encore des calculs en vrac

Exercice 72 (◔★ Des calculs de déterminants)
Calculer les déterminants des matrices suivantes pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

Indication p. 46

Exercice 73 (◑☆ Encore des calculs de déterminants)
Calculer les déterminants suivants.

1. Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

3. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \dots & a \\ b & c & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & c \end{vmatrix}$$

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \sum_{i=1}^{p} i$.

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

Indication p. 46

Exercice 74 (◑☆ Encore un déterminant avec des coefficients binomiaux)
Déterminer

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{2n}{0} & \binom{2n}{1} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$$

Indication p. 47

Exercice 75 (◑☆ Un déterminant et des polynômes)
Soit $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & P(3) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & P(4) & \cdots & P(n+1) \\ P(3) & P(4) & P(5) & \cdots & P(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & P(n+2) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Indication p. 47

Exercice 76 (◔☆ Changement de signe)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit B par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (B)_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i,j}.$$

Montrer que

$$\det(B) = \det(A).$$

Indication p. 47

Exercice 77 (◔★ Déterminant et factorisation)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**.

Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Indication p. 47

Exercice 78 (◑★ Déterminant et factorisation II)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**.

1. Soient $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ et $a_2 > 0$.

Montrer que $\det(a_2A^2 + a_1AB + a_0B^2) \geq 0$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(A^{2k+1} + B^{2k+1}\right)$ est du même signe que $\det(A+B)$.

Indication p. 47

Exercice 79 (◑☆ Il paraît que c'est un exercice classique)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose de plus que $\mathrm{rg}(B) = 1$.

Montrer que

$$\det(A+B)\det(A-B) \leq \det(A)^2.$$

Indication p. 48

Thème: déterminants et arithmétique

On rappelle que $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$; est l'ensemble des matrices à coefficients entiers. Il s'agit d'un sous anneau de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times$.

Exercice 80 (◔★♠ Inversibilité dans un anneau)
Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(M) \in \mathbb{Z}^\times.$$

(Où $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ est le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$).

Proposer une généralisation.

Indication p. 48

Exercice 81 (◑☆ Déterminant, divisibilité et transposée I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier **impair**.

Soit $A \in S_n(\mathbb{Z})$ une matrice symétrique à coefficients entiers. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de A sont pairs alors $\det(A)$ est pair.

Indication p. 48

Exercice 82 (◔☆ Déterminant, divisibilité et transposée II)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier **impair**.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ des entiers non nuls.

Montrer que $a+b \mid \det(aM + bM^\top)$.

Indication p. 48

Exercice 83 (◔☆ Bézout, déterminant et comatrice)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Montrer que

$$\det(A) \wedge \det(B) = 1 \Rightarrow \exists (U, V) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^2, AU + BV = I_n.$$

Indication p. 48

Exercice 84 (◕★ Déterminant de Smith)
On rappelle que φ est la fonction indicatrice d'Euler.

On pose

$$A = (i \wedge j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Indication p. 48

Exercice 85 (◑☆ Un Vandermonde en arithmétique)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ des entiers.

Montrer que

$$\prod_{j=1}^{n-1} j! \mid \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Indication p. 49

Exercice 86 (◑☆ Les nombres impairs sont non nuls)
Soit n un entier **pair**.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} = \pm 1$ sinon.

Montrer que A est inversible.

Indication p. 49

Exercice 87 (◕★ Irréductibles des matrices à coefficients entiers)
On dit que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ est «irréductible» ssi

$$\forall B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), A = BC \Rightarrow (B \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times \text{ ou } C \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times).$$

Caractériser les irréductibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ en termes de déterminant.

Indication p. 49

Thème: déterminants et dénombrement

Exercice 88 (◕★ Dénombrement de déterminants)
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$|\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}|.$$

Indication p. 49 · Solution p. 52

Exercice 89 (◕☆ Déterminant pour le dénombrement)
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer

$$\det\left(\begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & r_n \end{pmatrix}\right).$$

2. On considère Ω un ensemble de cardinal m et on suppose qu'il existe $D_1, ..., D_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω deux à deux distinctes telles que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ si $i \neq j$ alors $\left|D_i \cap D_j\right| = a$. Montrer que $m \geq n$.

Indication p. 49 · Solution p. 54

Exercice 90 (◕★ Où sont les déterminants et le dénombrement ?)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\sigma \in S_n$ on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}.$$

Indication p. 50 · Solution p. 55

Exercice 91 (◕★ L'exercice des cailloux)
On dispose de $2n+1$ cailloux de poids $p_1, ..., p_{2n+1}$ vérifiant la propriété suivante: si on retire n'importe quel caillou alors les $2n$ cailloux restants peuvent être séparés en deux groupes de n cailloux de même poids.

Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Indication p. 50

Thème: Wronskien et Cie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Étant donnée une famille de fonctions $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}))^n$, on définit le *Wronskien* de la famille la fonction $W_n(f_1, ..., f_n) : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in I,\ W_n(f_1, ..., f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_{n(t)} \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 92 (◔★ Wronskien et liberté)
1. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}))^n$.

   Montrer que **si** $(f_1, ..., f_n)$ est liée **alors** $W_n(f_1, ..., f_n) = 0$.
2. Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 telles que $W_2(f_1, f_2) = 0$ et (f_1, f_2) est libre.

Indication p. 50 · Solution p. 57

Exercice 93 (◔★ Wronskien et EDL2H)
Soient $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\left(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

2. En déduire que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) (y_1, y_2) est libre,
(ii) $\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix}\right)$ est libre,
(iii) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

Indication p. 50 · Solution p. 59

Exercice 94 (◑☆ Wronskien et EDL, cas général)
Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Soient $y_1, ..., y_n \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n homogène

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0.$$

Montrer que $W_n(y_1, ..., y_n)$ vérifie

$$\forall t \in I,\ W_n(y_1, ..., y_n)(t) = W_n(y_1, ..., y_n)(0) \exp\left(-\int_0^t a_{n-1}(s)\mathrm{d}s\right).$$

Indication p. 50

Exercice 95 (◕☆ Wronskien et multiplication)
Soient $y_1, ..., y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\forall t \in I, W_n(gy_1, ..., gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, ..., y_n)(t).$$

Indication p. 51 · Solution p. 60

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Det et automorphisme de corps)
Écrire par exemple la formule explicite du déterminant.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Polynôme caractéristique)
Écrire la formule explicite du déterminant.

Le degré est n et le coefficient dominant $(-1)^n$, le coefficient constant $\det(A)$ et celui d'ordre $n-1$, $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Déterminant triangulaire par blocs)
Au choix:

- ▷ En utilisant la formule
- ▷ Par pivot par blocs
- ▷ Par unicité des formes n-linéaires alternées

Indication 4 · Énoncé p. 2 (Déterminant de Vandermonde)
Cf cours.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Inversibilité et changement de corps)
Deux preuves possibles du sens $\Longleftarrow$: par algorithme du pivot en vérifiant qu'à chaque étape les coefficients sont dans $\mathbb{K}$, ou par déterminant.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Similitude et changement de corps)
Remarquer que la fonction polynomiale $t \mapsto \det(A+tB)$ est non nulle comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ car non nulle comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Matrices de rang 1)
Plusieurs méthodes

- ▷ Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 0_{1,n-1} \\ \vdots & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$.
- ▷ Travailler sur les lignes et utiliser le caractère alterné.

Indication 8 · Énoncé p. 3 (Groupe spécial linéaire)
Ker(det)

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Densité des matrices inversibles: version première année)

1. Cf exercice 2. Comme il s'agit d'un polynôme non nul.
2. Distinguer $i=j$ et $i \neq j$.
3. Ainsi «toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles».

   On remarque que
   - ▷ La notion de «limite de matrices» est ainsi comprise comme une limite de chaque coefficient. On pourrait aussi définir une limite à l'aide de diverses normes matricielles. Vous verrez en deuxième année que comme $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes ces notions sont équivalentes.

▷ Ce résultat s'énonce aussi comme «$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$».
▷ Ce résultat est souvent utilisé de la manière suivante: on montre un résultat pour les matrices inversibles, et si les fonctions en jeu sont continues (par exemple polynomiales) alors le résultat est vrai pour toutes les matrices.

En particulier un résultat très utile dans ce TD est le suivant:

Pour une fonction $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to F$ «**continue**» (en particulier polynomiale en les coefficients suffit) on a

$$\boxed{\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), f(A) = 0 \Rightarrow \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = 0}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Générateurs de SL_n)
On peut montrer que toute transposition peut s'écrire comme composée de transvections à un signe $-$ près. Procéder ensuite par pivot.

Plus précisément remarquer que pour $i \neq j$,
▷ $L_i \leftarrow L_i + L_j$
▷ $L_j \leftarrow L_j - L_i$
▷ $L_i \leftarrow L_i + L_j$

revient à effectuer $(L_i, L_j) \leftarrow (L_j, -L_i)$.

En déduire que si $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, il existe des matrices de transvections $T_1, ..., T_p$ et $S_1, ..., S_q$ telles que

$$A = T_p \cdots T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \tilde{A} \end{pmatrix} S_1 \cdots S_q$$

puis conclure par récurrence.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Déterminant de matrice antisymétrique)
Avec A antisymétrique, $\det(A) = (-1)^n \det(A^\top) = -\det(A)$.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Gradient du déterminant)
1. C'est une fonction polynomiale.
2. Remarquer que pour $t \neq 0$, $\det(A + tH) = t^n \det(A) \det\big(A^{-1}H + \frac{1}{t} I_n\big)$.
3. Au choix développer ou plus simplement utiliser la question précédente et la densité des matrices inversibles (cf exercice 9)

On a en fait montré que pour le produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\nabla \det = \mathrm{Com}$$

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Polynôme et déterminant: le cas rang quelconque)
Par exemple se ramener à $B = J_{\mathrm{rg}(B)}$.

Ou bien développer par multilinéarité en annulant quand il y a strictement plus de $\mathrm{rg}(B)$ colonnes de B.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Dimension de l'ev des formes alternées)

1. Montrer qu'il s'agit d'un sev des formes p-linéaires.

2. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Montrer qu'une forme p-linéaire alternée φ est entièrement déterminée par les $\varphi\big(e_{i_1}, ..., e_{i_p}\big)$ où $i_1 < \cdots < i_p$.

On obtient alors $\binom{n}{p}$.

Indication 15 · Énoncé p. 5 (Déterminant d'une somme ?)
On peut écrire $A = PJ_rQ$ avec P et Q inversibles (pourquoi ?) et donc pour tout B, $\det(A + B) = \det(P)\det\big(J_r + \tilde{B}\big)\det(Q)$ où $B = P\tilde{B}Q$. Prendre ensuite un $\tilde{B}$ bien choisi.

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Des matrices inversibles partout dans toutes les directions)
Considérer $t \mapsto \det(A^{-1}B + tI_n)$.

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Un lien entre déterminant et trace)
Noter φ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(x_1, ..., x_{j-1}, u\big(x_j\big), x_{j+1}, ..., x_n\big)$.

Alors

- φ est n-linéaire
- φ est alternée: si $x_{j_1} = x_{j_2}$ dans la somme distinguer les termes $j \notin \{j_1, j_2\}$ nuls par caractère alterné et la somme des deux termes restants nulle par antisymétrie

par conséquent $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ pour une certaine constante λ (pourquoi ?). Déterminer la constante en évaluant par exemple dans $\mathcal{B}$.

Indication 18 · Énoncé p. 6 (Dérivée d'une forme multilinéaire)
Faire par multilinéarité et DL ou par la formule explicite dans une base.

Indication 19 · Énoncé p. 6 (Un cas très particulier de déterminant de somme)
Plusieurs méthodes:

- remarquer que $t \mapsto \det(A + tB)$ est affine et utiliser l'exercice 12
- se ramener à $B = J_1$
- traiter le cas A inversible, cf exercice 7 puis par densité
- développer par multilinéarité et remarquer que les $\det\big(A_1, ..., B_j, ..., A_n\big)$ donnent $\big(\mathrm{Com}(A)^\top B\big)_{j,j}$ par développement selon la j-ème colonne.

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Déterminant d'une symétrie)
Écrire s dans une base adaptée.

Indication 21 · Énoncé p. 7 (Déterminant de la transposée)
Écrire dans une base bien choisie (canonique ou bien adaptée à $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$).

Ou bien constater qu'il s'agit d'une symétrie, cf l'exercice 20

Indication 22 · Énoncé p. 7 (Symétrisation et antisymétrisation)
Soit τ une transposition. Remarquer que l'application $S_p \to S_p$ définie par $\sigma \mapsto \sigma\tau$ est bijective et faire un changement d'indice.

Indication 23 · Énoncé p. 7 (Morphismes vers un groupe abélien)
- ▷ φ est constante sur les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ car G est abélien
- ▷ deux transvections sont conjuguées, et comme $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on peut montrer que le déterminant d'une transvection est 1
- ▷ deux dilatations de même rapport sont conjuguées
- ▷ toute matrice est produit de transvections et d'une dilatation (cf exercice 10)

Indication 24 · Énoncé p. 8 (Multiplicativité et inversibilité)
- ▷ Comme pour toute équation fonctionnelle commencer par des cas particuliers: $f(0_n) = 0$, $f(I_n) = 1$, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $f(A) \in \mathbb{K}^\times$.
- ▷ En déduire que le caractère nul ou non est stable par équivalence.
- ▷ Montrer que toute matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
- ▷ Conclure.

Indication 25 · Énoncé p. 8 (D'autres caractérisations du déterminant)
Dans les deux cas det est l'unique solution.

On peut aussi remarquer que $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{11}$ et que E_{11} est de rang 1. Ainsi on peut utiliser un sens du premier point pour le second et l'autre sens du second point pour le premier.

- ▷ Vérifier que det convient pour le premier point (et donc pour le second).
- ▷ Faire l'exercice 24 pour remarquer tout d'abord que l'image d'une matrice inversible est non nulle, et que l'image d'une matrice non inversible est nulle.
- ▷ Remarquer que, comme les matrices d'opérations élémentaires engendrent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que f et det coïncident sur ces dernières.
- ▷ Remarquer que f est invariante de similitude.
- ▷ Les dilatations de même rapport étant semblables, c'est ok pour les dilatations.
- ▷ Les transvections de même « positions » étant semblables, on a en particulier qu'une transvection est semblable à son carré. Donc son image par f est 0 ou 1 et par inversibilité n'est pas 0.
- ▷ Se rappeler qu'on peut en fait construire une transposition à l'aide de transvections et de dilatations !

Indication 26 · Énoncé p. 9 (Le début de l'étude du permanent)
Exactement les mêmes preuves qu'en cours sur le déterminant.

Attention néanmoins, les transvections ne conservent pas le permanent !

De plus le permanent n'est a priori pas multiplicatif !

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Un produit extérieur sans le dire)
Vérifier les caractères multilinéaires par rédaction automatique.

Pour le caractère alterné prendre deux vecteurs égaux et déterminer les termes non immédiatement nuls. Vérifier que leur somme fait 0.

Indication 28 · Énoncé p. 10 (Matrice de Toeplitz tridiagonale)
Développer selon la première (ou dernière) ligne (ou colonne) et repérer un déterminant par blocs.

Puis résoudre explicitement l'ERL2CCH en calculant « à la main » Δ_1 et Δ_2.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Liberté de fonctions et évaluations)
1. Développer par rapport à la dernière colonne pour obtenir une relation de liaison.
2. Procéder par récurrence, en utilisant la contraposée de la question précédente pour le choix de x_{n+1} dans l'hérédité.
3. Extraire une famille libre maximale.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Règle de Sarrus)
RAS, c'est juste la formule générale pour $n = 3$.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Déterminant circulant)
1. $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. C'est une matrice de Vandermonde. Calculer $J\Omega$ et remarquer que cela revient à multiplier chaque colonne d'indice j de Ω par ω^{j-1}.
3. On a $\Omega^{-1} J\Omega = \mathrm{Diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$ d'où $P(\Omega^{-1} J\Omega) = \mathrm{Diag}(P(1), P(\omega), ..., P(\omega^{n-1}))$ et par conséquent comme le déterminant est un invariant de similitude,
$$\det(A) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} P(\zeta).$$

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Déterminant et matrice compagnon)
Développer par rapport à la dernière ligne.

Indication 33 · Énoncé p. 13 (Déterminant du produit matriciel)
Écrire la matrice de g_A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (dans un ordre bien choisi). On obtient une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont A d'où un déterminant $\det(A)^p$.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Déterminant de la conjugaison)
Faire l'exercice 33 et remarquer qu'il s'agit seulement de la composée de celui-ci et de sa transposée.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Matrice antidiagonale)
Au choix: développer selon une ligne (resp. colonne) ou bien opérer par permutation sur les lignes/colonnes ou bien repérer des blocs 2×2.

Indication 36 · Énoncé p. 14 (Matrice antidiagonale: polynôme caractéristique)
Comme à l'exercice 35, au choix développer ou visualiser une matrice diagonale par blocs 2×2 ou bien pivoter pour $\lambda \neq 0$.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Grand classique: Résultant)
1. Par Bézout il s'agit des multiples de $P \wedge Q$ de degré $\leq p+q-1$.
2. On obtient la matrice dont le déterminant est le résultant.
3. Par Bézout précédent l'application est inversible ssi $P \wedge Q = 1$.

Indication 38 · Énoncé p. 15 (Discriminant d'un polynôme)
1. P admet une racine multiple ssi $P \wedge P' \neq 1$
2. On obtient à un facteur près les fameux $b^2 - 4ac$ et $-4p^3 - 27q^2$
3. Il s'agit donc d'une généralisation de la notion de discriminant d'un polynôme.

Indication 39 · Énoncé p. 15 (Autour de la matrice d'Attila I)
Regarder au choix les exercices 7 ou 40.

Indication 40 · Énoncé p. 15 (Autour de la matrice d'Attila II)
Poser $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et utiliser la multilinéarité et le caractère alterné pour calculer $\det(C + \lambda_1 E_1, ..., C + \lambda_n E_n)$.

Remarquer que cela n'est qu'un cas particulier des matrices de rang 1.

Indication 41 · Énoncé p. 16 (Des Huns très bien camouflés ou le déterminant de Hurwitz)
En pivotant ou en utilisant une matrice simple semblable à J on obtient que f est une fonction affine.

Dans le cas $a \neq c$ évaluer en $-a$ et $-c$. On obtient finalement

$$\frac{a\prod_{k=1}^{n}(b_k - c) - c\prod_{k=1}^{n}(b_k - a)}{a - c}.$$

Dans le cas $a = c$ se reporter à l'exercice 40 ou bien utiliser la continuité.

Indication 42 · Énoncé p. 16 (Déterminant d'une matrice de permutation)
C'est en effet $\varepsilon(\sigma)$.

Indication 43 · Énoncé p. 16 (Déterminant en L)
Par transvection annuler tous les coefficients de la dernière ligne (ou colonne) sauf celui en (n, n). Développer et faire une récurrence.

Indication 44 · Énoncé p. 17 (Matrice anticirculante)
Commencer par traiter l'exercice 31.

Indication 45 · Énoncé p. 17 (Rang de la comatrice)
Dans chacun des cas commencer par écrire

$$A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A) I_n.$$

1. Si A est inversible, $\mathrm{Com}(A)$ est inversible.
2. Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ toutes les sous-matrices $(n-1)\times(n-1)$ extraites sont de rang $< n-1$ donc tous les cofacteurs sont nuls.
3. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang ≤ 1 et au moins un cofacteur est non nul.

Indication 46 · Énoncé p. 17 (Comatrice de la comatrice)
Dans le cas inversible utiliser le lien entre comatrice et inverse.

Dans le cas non-inversible pour $n \geq 3$ utiliser le rang de la comatrice (exercice 45). (Ou bien utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

Indication 47 · Énoncé p. 17 (Comatrice et transposée)
Juste écrire les coefficients.

Ou bien le faire pour les matrices inversibles et remarquer que $A \mapsto \mathrm{Com}(A^\top) - \mathrm{Com}(A)^\top$ est polynomiale en les coefficients de A.

Indication 48 · Énoncé p. 18 (Comatrice et produit)
Le faire pour les matrices inversibles et remarquer que $\mathrm{Com}(AB) - \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$ est polynomiale en les coefficients de A et B.

Utiliser ensuite la densité.

On remarque qu'on en déduit en particulier que **si deux matrices sont semblables alors leurs comatrices sont semblables**.

Indication 49 · Énoncé p. 18 (Image de la comatrice)
Traiter le cas $n = 1$ séparément.

Il s'agit de l'union des matrices inversibles, des matrices de rang 1 et du singleton de la matrice nulle.

Pour une inclusion il s'agit d'une disjonction de cas sur le rang et de l'exercice 45.

Pour l'autre sens:
▷ que dire de $\mathrm{Com}(\lambda\,\mathrm{Com}(A))$ pour A inversible ?
▷ Pour le rang 1, remarquer que par similitude il suffit d'obtenir $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Pour cela construire des matrices explicites.

Indication 50 · Énoncé p. 18 (Vandermonde par changement de base)
1. Au moins deux méthodes:

▷ Faire des transvections sur les colonnes.
▷ Faire un changement de base dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ entre la base canonique et la base $(P_0, ..., P_{n-1})$ et regarder l'application d'évaluation.

2. Prendre $P_j = \prod_{i \leq j}(X - x_i)$.

Indication 51 · Énoncé p. 19 (Vandermonde par variation d'un coefficient)

1. Développer par rapport à la dernière ligne.

2. Les $(x_1, ..., x_n)$ sont des racines.

3. Un polynôme de degré n est entièrement déterminé par n racines et son coefficient dominant. Procéder ensuite par récurrence sur n.

Indication 52 · Énoncé p. 19 (Vandermonde et coefficient dominant de Lagrange)

1. RAS

2. Les coefficients de $(V_n)^{-1}$ sont les coefficients des polynômes d'interpolation de Lagrange associés dans la base canonique.

En particulier la dernière ligne est constituée des coefficients dominants.

Or le coefficient dominant de L_j est $\frac{1}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$.

3. Comme V_n est inversible $V_n^{-1} = \frac{1}{\det(V_n)}\mathrm{Com}(V_n)^\top$.

Or $\det(V_{n-1}) = (\mathrm{Com}(V_n))_{n,n}$.

4. Conclure par récurrence.

Indication 53 · Énoncé p. 20 (Vandermonde par pivot)

1. Effectuer dans l'ordre: $C_n \leftarrow C_n - x_n C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_n C_{n-2}$, ..., $C_2 \leftarrow C_2 - x_n C_1$.

2. Développer par rapport à la dernière ligne et utiliser la linéarité.

Indication 54 · Énoncé p. 20 (Vandermonde par translation)

1. On obtient une somme de $\det\big(C_1, ..., C_{j-1}, (j-1)C_{j-1}, C_{j+1}, ..., C_n\big)$ et donc 0.

2. Vandermonde est donc invariant par translation. Prendre $t = -x_n$, développer, factoriser chaque ligne et retranslater pour obtenir la récurrence de Vandermonde.

Indication 55 · Énoncé p. 21 (Vandermonde à trou)
Compléter en un déterminant de Vandermonde «complet» avec X au lieu de λ_i.

Interpréter alors le déterminant à calculer comme le j-ième coefficient d'un polynôme de Vandermonde.

Indication 56 · Énoncé p. 22 (Déterminant de Cauchy)

1. Transvections.

2. Les pôles sont simples.

3. Avec F la fraction rationnelle précédente, effectuer des transvections pour obtenir comme dernière ligne $F(b_1)\ F(b_2) \cdots F(b_n)$ qui est $0\ 0 \cdots 0\ 1$. Puis développer et repérer une récurrence.

Alternativement faire de même sur les autres lignes pour se ramener à une matrice triangulaire.

Indication 57 · Énoncé p. 23 (Il y a du Vandermonde derrière)

1. Interpréter la matrice comme le produit de deux matrices de type Vandermonde.
2. Développer par le binôme et se ramener à la question précédente.

Indication 58 · Énoncé p. 23 (Vandermonde puis un produit)
Noter $\sigma_n = x_1 x_2 ... x_n$ et constater que par dilatations sur les lignes on peut se ramener au calcul de

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & \sigma_n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}$$

qui à un facteur multiplicatif près est une matrice de Vandermonde.

Indication 59 · Énoncé p. 24 (Encore des Vandermonde peu intéressants)
Noter V_n le déterminant de Vandermonde associé.

1. Par exemple faire le point suivant et évaluer en $\lambda = 0$. On obtient $x_1 \cdots x_n (V_n)^2$.
2. Constater que

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & \lambda^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication 60 · Énoncé p. 24 (Complément de Schur)
Effectuer la transvection par blocs $L_2 \to L_2 - CA^{-1}L_1$ c'est à dire multiplier à gauche par $\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}$.

Indication 61 · Énoncé p. 24 (Complément de Schur et calcul de déterminant)
Faire l'exercice 60.

Indication 62 · Énoncé p. 25 (Blocs et matrices 2x2)

1. Effectuer les opérations par blocs (pourquoi est-ce possible ?) $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.
2. De même, $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$.

Solution p. 52

Indication 63 · Énoncé p. 25 (Blocs 2x2 de même taille et qui commutent)
Cf l'exercice 60

Indication 64 · Énoncé p. 25 (Blocs 2x2 de même taille et qui commutent, bis)
Commencer par traiter l'exercice 63 dans le cas où A est inversible.

Puis méditer sur

$$P(t) = \begin{vmatrix} A+tI_n & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

Indication 65 · Énoncé p. 26 (Complément de Schur et inverse par blocs)
Poursuivre le calcul par blocs de l'exercice 60.

On obtient

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

et constater ensuite que l'inverse d'une transvection par blocs $\begin{pmatrix} I_p & \Lambda \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} I_p & -\Lambda \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ tandis que l'inverse d'une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1} \end{pmatrix}$.

On peut commenter que cette formule est peu utilisable en pratique et que dans le cas où $p = q = 1$ on retrouve l'expression de l'inverse d'une matrice 2×2.

Indication 66 · Énoncé p. 26 (Identité de Sylvester (pour les déterminants))
Par exemple faire deux compléments de Schur sur $\begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_p \end{pmatrix}$

Indication 67 · Énoncé p. 26 (Un cas particulier de déterminant par blocs)
Au choix:

- Faire le complément de Schur par rapport à $\lambda \neq 0$, puis $\det(A - CL)$ où CL est de rang 1 puis continuité.
- Faire le complément de Schur par rapport à A dans le cas A inversible puis continuité.

Indication 68 · Énoncé p. 27 (Déterminant et opérations du pivot par blocs)
On peut remarquer qu'effectuer une opération élémentaire par blocs sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice d'opération élémentaire par bloc.

1. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} \Lambda & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\right) = \det(\Lambda)$$

2. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ B & I_q \end{pmatrix}\right) = 1$$

3. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0_{p,q} & I_p \\ I_q & 0_{q,p} \end{pmatrix}\right) = (-1)^{pq}$$

ou bien sinon qu'il s'agit d'effectuer le cycle $(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)$ sur les lignes, et ce p fois, puis que $(p+q-1)\times p$ a la même parité que pq.

Indication 69 · Énoncé p. 27 (Déterminant par blocs qui commutent: cas général)

1. Effectuer comme pour le complément de Schur des transvections pour annuler les coefficients au-dessus de A_{nn} avec A_{nn} comme pivot.
2. Soit faire un argument abstrait de calcul de déterminant dans un anneau commutatif ou bien séparer les permutations de S_n selon la valeur de $\sigma(n)$.
3. Procéder par récurrence sur n en utilisant les deux questions précédentes (remarquer un usage de densité et plein d'usages de commutativité).

Indication 70 · Énoncé p. 28 (Un cas particulier de Cauchy-Binet)
Cela revient à montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}\sum_{l=1}^{p} a_{2l}b_{l2} - \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2}\sum_{l=1}^{p} a_{2l}b_{l1} = \sum_{i<j}\big(a_{1i}a_{2j}-a_{1j}a_{2i}\big)\big(b_{i1}b_{j2}-b_{i2}b_{j1}\big).$$

Et donc un exercice de somme.

Indication 71 · Énoncé p. 28 (Cauchy-Binet)
Utiliser la multilinéarité et le caractère alterné et ne pas hésiter à faire des calculs…

Indication 72 · Énoncé p. 28 (Des calculs de déterminants)
On obtient

1. 0
2. $(1-a^2)^2$
3. $(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$
4. 0

Indication 73 · Énoncé p. 29 (Encore des calculs de déterminants)

1. Noter Δ_n le déterminant $n\times n$. En développant par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0\\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}\\ &= (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}\\ &= (1+x^2)\Delta_n - x^2\Delta_{n-1}.\end{aligned}$$

   Il s'agit alors d'une ERL2CCH.
2. Par pivot sur les colonnes $(\forall i\in[\![1,n-1]\!], C_i \leftarrow C_i - C_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$
$$= (1-n)(2-n)(3-n)\cdots(n-1-n)n$$
$$= (-1)^{n-1}n!$$

3. Utiliser la formule explicite. Les seules permutations avec un terme non nul sont l'identité et les transpositions $(1i)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. On obtient alors

$$\lambda c^{n-1} - (n-1)abc^{n-2}.$$

Alternativement développer par rapport à la dernière ligne.

4. Par transvections successives sur les colonnes $(C_{i+1} \leftarrow C_{i+1} - C_i)$, on obtient

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & S_2-S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & S_2-S_1 & S_3-S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2-S_1 & S_3-S_2 & \cdots & S_n-S_{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$
$$= n!.$$

Indication 74 · Énoncé p. 29 (Encore un déterminant avec des coefficients binomiaux)
Par exemple effectuer pour tout k, $L_k \leftarrow L_k - L_{k+1}$ et en utilisant une relation de Pascal déterminer une relation de récurrence.

Indication 75 · Énoncé p. 30 (Un déterminant et des polynômes)
Cela revient à montrer que la famille des colonnes (ou lignes) est liée.

Montrer que de manière générale $(P(X + (j-1)))_{1 \leq j \leq n}$ est liée (car n polynômes dans $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ de dimension $n-1$).

Indication 76 · Énoncé p. 30 (Changement de signe)
Par exemple utiliser la formule explicite.

Indication 77 · Énoncé p. 30 (Déterminant et factorisation)
Comme A et B **commutent**, $A^2 + B^2 = (A + iB)(A + iB)$.

Indication 78 · Énoncé p. 30 (Déterminant et factorisation II)
Commencer par traiter l'exercice 77.

1. Avec λ et $\overline{\lambda}$ les racines complexes conjuguées on a $a_2X^2+a_1X+a_0 = a_2(X-\lambda)\big(X-\overline{\lambda}\big)$.

Montrer alors que

$$a_2A^2+a_1AB+a_0B^2 = a_2(A-\lambda B)\overline{(A-\lambda B)}.$$

2. Remarquer que $X^{2k+1}+1$ a pour racines -1 et des racines complexes conjuguées.

D'où $A^{2k+1}+B^{2k+1} = (A+B)\cdots$ avec des termes associés avec leur conjugué dans le $\cdots$.

Indication 79 · Énoncé p. 31 (Il paraît que c'est un exercice classique)
Faire plutôt l'exercice 19.

Indication 80 · Énoncé p. 31 (Inversibilité dans un anneau)
Dans un sens écrire $MM^{-1} = I_n$ puis passer au det.

Dans l'autre sens utiliser la formule de la comatrice.

De manière générale si $A \subset \mathbb{K}$ alors $M \in \mathrm{M}_n(A) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible dans $\mathrm{M}_n(A)$ ssi $\det(M) \in A^\times$.

Et pour A anneau commutatif intègre on a toujours $A \subset \mathrm{Frac}(A)$.

Indication 81 · Énoncé p. 31 (Déterminant, divisibilité et transposée I)
Utiliser par exemple la formule explicite. Pour toute permutation σ

- ▷ Si σ admet un point fixe alors $\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$ est pair.
- ▷ Si σ n'a pas de point fixe, alors regrouper le terme en σ avec celui en σ^{-1} (pourquoi est-ce possible ?)

Indication 82 · Énoncé p. 31 (Déterminant, divisibilité et transposée II)
Remarquer que $\det(M-M^\top) = 0$ dans $\mathbb{Z}$ et donc dans $\frac{\mathbb{Z}}{a+b}\mathbb{Z}$.

Remarquer aussi que dans $\frac{\mathbb{Z}}{a+b}\mathbb{Z}$, $b=-a$.

Indication 83 · Énoncé p. 32 (Bézout, déterminant et comatrice)
On rappelle que $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$ et qu'il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $\det(A)u+\det(B)v=1$.

Remarquer que la réciproque est fausse.

Indication 84 · Énoncé p. 32 (Déterminant de Smith)
Montrer que

$$i\wedge j = \sum_{d\in\mathcal{D}(i)\cap\mathcal{D}(j)} \varphi(d)$$

puis en déduire qu'avec $M = \big(\delta_{i\in\mathcal{D}(j)}\big)$ une matrice d'incidence de la relation de divisibilité on a

$$A = M^\top DM$$

où D est une matrice diagonale bien choisie.

Conclure en remarquant que M est triangulaire.

Indication 85 · Énoncé p. 32 (Un Vandermonde en arithmétique)
Il suffit de montrer que le produit des factorielles divise $V(a_1,...,a_n)$.

Or par opérations du pivot montrer que

$$V(a_1,...,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2)\\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2)\\ 1 & a_3 & a_3(a_3-1) & a_3(a_3-1)(a_3-2) & \cdots & a_3(a_3-1)\cdots(a_3-n+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & a_n(a_n-1)(a_n-2) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$$

puis conclure en remarquant que (coefficients binomiaux) on a pour tout $j\in[\![1,n-1]\!]$ et $a\in\mathbb{Z}$, $j!$ divise $a(a-1)\cdots(a-j+1)$.

Indication 86 · Énoncé p. 32 (Les nombres impairs sont non nuls)
Montrer que $\det(A)$ est impair.

Pour cela regarder par exemple dans $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$.

Indication 87 · Énoncé p. 33 (Irréductibles des matrices à coefficients entiers)
Commencer par montrer que les inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ sont ceux de déterminant dans $\mathbb{Z}^\times=\{-1,+1\}$.

Montrer que si le déterminant est irréductible (i.e premier ou égal à 1) alors la matrice est irréductible.

Pour la réciproque (par contraposée) traiter d'abord le cas triangulaire.

S'y ramener ensuite par des transvections et donc un algorithme d'Euclide.

Indication 88 · Énoncé p. 33 (Dénombrement de déterminants)
Commencer par dénombrer les matrices inversibles.

Pour cela constater que construire une matrice inversible revient à construire successivement les colonnes de manière à ce que chaque colonne ne soit pas dans le sev engendré par les précédentes.

Ensuite montrer que tous les déterminants non nuls sont « équiprobables ».

Solution p. 52

Indication 89 · Énoncé p. 33 (Déterminant pour le dénombrement)

1. Introduire $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et étudier $t\mapsto\det(a+tJ)$.
2. Interpréter la matrice précédente comme une matrice d'adjacence fois sa transposée.

Solution p. 54

Indication 90 · Énoncé p. 34 (Où sont les déterminants et le dénombrement ?)
Interpréter comme la dérivée d'une fonction génératrice.

Et cette fonction génératrice comme un déterminant.

Solution p. 55

Indication 91 · Énoncé p. 34 (L'exercice des cailloux)
Commencer par traduire le problème: pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$ il existe a_{ij} des coefficients tq $a_{ii} = 0$, $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ la moitié des a_{ij} valent 1 et l'autre moitié valent -1 et pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij} p_j = 0$.

On obtient une matrice A et il faut montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{2n+1} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or ils appartiennent tous les deux au noyau de A.

On peut alors s'intéresser au lemme suivant, qui est exactement l'exercice 86: si une matrice $2n \times 2n$ de $\mathrm{M}_{2n}\left(\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}\right)$ a une diagonale nulle et tous les autres coefficients non nuls alors elle est inversible.

Ce n'est plus qu'une question de réduction modulaire et de mineurs ensuite.

Indication 92 · Énoncé p. 34 (Wronskien et liberté)
1. La dérivée de 0 est 0.
2. Prendre des fonctions de «supports de variations» bien disjoints.

Solution p. 57

Indication 93 · Énoncé p. 35 (Wronskien et EDL2H)
1. Dériver W.
2. Une exponentielle n'est jamais nulle. Remarquer que si λ_1 et λ_2 font une liaison locale alors on peut dériver $t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ pour obtenir une EDO une condition ponctuelle.

Solution p. 59

Indication 94 · Énoncé p. 35 (Wronskien et EDL, cas général)
Écrire pour tout j, $Y_j = \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et trouver une fonction matricielle (compagnon) A telle que pour tout j, $Y_j' = AY_j$.

Remarquer que le wronskien est égal à $\det(Y_1 \cdots Y_n)$, dériver une forme multilinéaire pour obtenir $\det(AY_1, Y_2, ..., Y_n) + \cdots + \det(Y_1, Y_2, ..., AY_n)$ et conclure à l'aide de l'exercice 17.

Indication 95 · Énoncé p. 35 (Wronskien et multiplication)
Attention ce n'est pas direct car il y a des dérivées de produit.

Pour traiter ces dérivées de produit on peut utiliser une formule de Leibniz et remarquer que cette formule donne une structure «triangulaire» en nombre de dérivées de g.

Solution p. 60

Solutions

Solution pour l'exercice 62 · Énoncé p. 25 · Indication p. 44 (Blocs et matrices 2x2)

1. En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix}.$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix}.$$

De même en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}.$$

On a donc bien, comme déterminant triangulaire par blocs,

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)}.$$

2. En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{vmatrix}.$$

Puis en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix}.$$

On a donc bien, comme déterminant triangulaire par blocs,

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)}.$$

Solution pour l'exercice 88 · Énoncé p. 33 · Indication p. 49 (Dénombrement de déterminants)

▷ **Cardinal de $\mathbf{GL_n(\mathbb{K})}$**

On remarque tout d'abord que si $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension k, alors comme F est en bijection avec $\mathbb{K}^k$ on a $|F| = q^k$. D'où $|\mathbb{K}^n \setminus F| = q^n - q^k$.

De plus construire une matrice inversible revient à construire une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (la famille de ses colonnes).

Or une famille $(C_1, ..., C_r)$ est libre ssi pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a $C_k \notin \text{Vect}(C_1, ..., C_{k-1})$ (par récurrence).

On a donc

- $q^n - q^0$ choix pour C_1, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \text{Vect}(\varnothing) = \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$,
- $q^n - q^1$ choix pour C_2, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \text{Vect}(C_1)$ et comme (C_1) est libre $\dim(C_1) = 1$,
- $q^n - q^2$ choix pour C_3, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \text{Vect}(C_1, C_2)$ et comme (C_1, C_2) est libre $\dim(C_1, C_2) = 2$,
- ...
- $q^n - q^{n-1}$ choix pour C_n, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \text{Vect}(C_1, ..., C_{n-1})$ et comme $(C_1, ..., C_{n-1})$ est libre $\dim(C_1, ..., C_{n-1}) = n - 1$.

Au total on a donc

$$|\text{GL}_n(\mathbb{K})| = (q^n - q^0)(q^n - q^1)\cdots(q^n - q^{n-1})$$

ou encore

$$\boxed{|\text{GL}_n(\mathbb{K})| = q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^k}\right)}.$$

- **Cas $\alpha = 0$**

Pour $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\det(A) = 0$ ssi $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Comme $|\text{M}_n(\mathbb{K})| = q^{n^2}$ (c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2), on a donc

$$\boxed{|\{A \in \text{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}| = q^{n^2}\left(1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)\right)}.$$

- **Cas $\alpha \neq 0$**

Notons $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in \text{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}$.

Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{K}^*)^2$ on a $|\mathcal{D}_\alpha| = |\mathcal{D}_\beta|$.

En effet avec

$$D_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \end{pmatrix}$$

on a $\det(D_{\beta\to\alpha}) = \alpha\beta^{-1}$ d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\beta &\to \mathcal{D}_\alpha \\ M &\mapsto D_{\beta\to\alpha} M \end{aligned}$$

est bien définie, et bijective car de bijection réciproque $M \mapsto D_{\alpha\to\beta} M$.

Par conséquent (formule des bergers) on a (comme il y a $q - 1$ valeurs possibles pour le déterminant)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^\star, |\mathcal{D}_\alpha| = \frac{1}{q-1}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|$$

c'est à dire pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^\star$,

$$\boxed{|\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}| = q^{n^2}\frac{1}{q-1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q^k}\right)}.$$

Solution pour l'exercice 89 · Énoncé p. 33 · Indication p. 49 (Déterminant pour le dénombrement)

1. Soit $D = \begin{pmatrix} r_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_n-a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche alors à calculer $\det(D+aJ)$.

▷ **Si $a \notin \{r_1, ..., r_n\}$.**

Alors D est inversible d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1-a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2-a} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{r_n-a} \end{pmatrix}$.

Donc $\det(D+aJ) = \det(D)\det(I+aD^{-1}J)$.

Or $aD^{-1}J = \begin{pmatrix} \frac{a}{r_1-a} & \frac{a}{r_1-a} & \cdots & \frac{a}{r_1-a} \\ \frac{a}{r_2-a} & \frac{a}{r_2-a} & \cdots & \frac{a}{r_2-a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a}{r_n-a} & \frac{a}{r_n-a} & \cdots & \frac{a}{r_n-a} \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Donc (cf le reste du TD), $\det(I+aD^{-1}J) = 1+\mathrm{tr}(aD^{-1}J) = 1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\det(D+aJ) &= \det(D)\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a).\end{aligned}$$

▷ **Cas général.**

On a $a \mapsto \det(D+aJ)$ est polynomiale (en a) car le déterminant est polynomial en les coefficients, et $a \mapsto \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)$ est polynomiale.

Or ces deux fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{r_1,...,r_n\}$ qui est infini et (rigidité) sont donc égales.

D'où

$$\boxed{\det(D+aJ) = \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)}.$$

2. ▷ **Interprétation combinatoire de la matrice**

Notons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $r_i = |D_i|$.

On a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $r_i \geq a$.

De plus il existe au plus un $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $r_i = a$. En effet par l'absurde, si $i \neq j$ vérifient $r_i = r_j = a$ alors $|D_i \cap D_j| = a = |D_i| = |D_j|$ et donc $D_i = D_j$ ce qui contredit l'hypothèse que les D_i sont deux à deux distincts.

Ainsi,

$$\underbrace{\prod_{j=1}^{n}(r_j - a)}_{\geq 0} + a\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\prod_{j\neq i}^{n}(r_j - a)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{et au moins un } \neq 0}} > 0.$$

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j} = \delta_{j\in D_i}$.

Soit $M = AA^\top \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned}(M)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} A_{ik}A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{k\in D_i}\delta_{k\in D_j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{k\in D_i\cap D_j} \\ &= |D_i \cap D_j| \\ &= \begin{cases} a & \text{si } \ i \neq j \\ r_i & \text{si } \ i = j \end{cases}.\end{aligned}$$

Par le calcul de déterminant précédent on a

$$\det(M) > 0$$

comme somme de produits de termes strictement positifs.

Par conséquent M est inversible i.e $\mathrm{rg}(M) = n$.

Or

$$\mathrm{rg}(M) \leq \mathrm{rg}(A) \leq m.$$

Donc

$$\boxed{n \leq m}.$$

Solution pour l'exercice 90 · Énoncé p. 34 · Indication p. 50 (Où sont les déterminants et le dénombrement ?)

▹ **On se ramène à une fonction génératrice**

Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) x^{N(\sigma)}. \end{aligned}$$

(En fait on pourrait même définir $P = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) X^{N(\sigma)} \in \mathbb{R}[X]$.)

Alors f est continue (fonction polynomiale) et

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \int_0^1 x^{N(\sigma)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}. \end{aligned}$$

On cherche donc à calculer une expression plus simple de f.

(De manière générale, en combinatoire, pour calculer des sommes de la forme $\sum k a_k$ ou $\sum \frac{1}{k+1} a_k$ on introduit souvent la fonction génératrice $x \mapsto \sum a_k x^k$.)

▷ **La fonction génératrice est un déterminant**

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

alors par formule explicite du déterminant,

$$\Delta_n(x) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et x si $i = j$.

D'où pour tout $\sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = x^{N(\sigma)} \times 1^{n-N(\sigma)}$.

Donc

$$f(x) = \Delta_n(x).$$

▷ **Calcul du déterminant**

En notant

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

on a $\Delta_n(x) = \det((x-1)I_n + J)$.

Or J est de rang 1 (toutes les colonnes sont colinéaires et non nulles) et de trace $n \neq 0$.

Donc (résultat classique, à refaire si nécessaire),

$$J \sim \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(x-1)I_n + J \sim \begin{pmatrix} x-1+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}$ et par conséquent (le déterminant est un invariant de similitude et déterminant d'une matrice diagonale),

$$\Delta_n(x) = ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}.$$

▷ **Conclusion**

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \Delta_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x-1)^n\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 (x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + n\left[\frac{(x-1)^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{0-(-1)^{n+1}}{n+1} + n \times \frac{0-(-1)^n}{n} \\ &= (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{\sigma\in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}}.$$

Solution pour l'exercice 92 · Énoncé p. 34 · Indication p. 50 (Wronskien et liberté)

1. {Supposons que $(f_1, ..., f_n)$ est liée.}

Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t) = 0.$$

Alors comme les fonctions sont dérivables $n-1$ fois, on a

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in I, \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^{(i)}(t) = 0.$$

On a donc

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} f_j(t) \\ f_j'(t) \\ \vdots \\ f_j^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent pour tout $t \in I$ les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

sont liées et donc le déterminant de cette matrice est nul.

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in I, W_n(f_1, ..., f_n)(t) = 0}.$$

2. Soit χ une fonction dérivable valant 0 sur $]-\infty, 0[$ et non nulle sur $]0, +\infty[$.

Par exemple $\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cf TD de dérivabilité pour montrer même le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de χ.

On définit alors $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = \chi(t)$$
$$f_2(t) = \chi(-t).$$

▷ **Liberté**

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0.$$

En particulier comme par exemple $\chi(-1) = 0$ et $\chi(1) \neq 0$ on a

▷ En évaluant en 1,

$$\lambda_1 \chi(1) + \lambda_2 \chi(-1) = 0$$

d'où

$$\lambda_1 = 0.$$

▷ En évaluant en -1,

$$\lambda_1 \chi(-1) + \lambda_2 \chi(1) = 0$$

d'où

$$\lambda_2 = 0.$$

Donc $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est libre}}$.

▷ **Wronskien nul**

On remarque que par continuité de χ' on a pour tout $t \leq 0$, $\chi(t) = 0$ et $\chi'(t) = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

▷ Si $t \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} W_2(f_1, f_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \chi(-t) \\ 0 & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

▷ Si $t > 0$ alors

$$\begin{aligned} W_2(f_1, f_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \chi(t) & 0 \\ \chi'(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans tous les cas on a donc

$$\boxed{W_2(f_1, f_2)(t) = 0}.$$

Remarque: on pourrait même généraliser avec plus de fonctions. En prenant n segments disjoints $[a_i, b_i]$ et n fonctions à supports $[a_i, b_i]$, par exemple $t \mapsto \chi(t - a_i)\chi(b_i - t)$, on obtiendrait n fonctions linéairement indépendantes de Wronskien nul.

Solution pour l'exercice 93 · Énoncé p. 35 · Indication p. 50 (Wronskien et EDL2H)

1. Comme $y_1, y_2, y_1', y_2' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, par somme et produit on a $W_2(y_1, y_2) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et de plus

$$\begin{aligned} W_2(y_1, y_2)' &= (y_1 y_2' - y_2 y_1')' \\ &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_2' y_1' + y_2 y_1'') \\ &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_0 y_1) \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') - a_0(y_1 y_2 - y_2 y_1) \\ &= -a_1 W_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Par conséquent $W_2(y_1, y_2)$ est solution de l'équation différentielle

$$w' = -a_1 w$$

et donc (équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène) on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\Big(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)}.$$

2. La proposition (ii) se réécrit $W_2(y_1, y_2)(0) \neq 0$ et la (iii) se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, W_2(y_1, y_2)(t) \neq 0$.

Par la formule précédente, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\right) \neq 0$, on a donc $\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$.

On a déjà vu que **si** (y_1, y_2) est liée **alors** pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W_2(y_1, y_2)(t) = 0$ donc par contraposée $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$.

Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$ par contraposée.

Supposons que $W_2(y_1, y_2)(0) = 0$.

Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ non tous les deux nuls tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$.

Alors on a

$$\begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et de plus par principe de superposition, z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = 0.$$

Donc (cf cours d'équations différentielles) z est la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène ci-dessus vérifiant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ et donc $z = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$.

Donc la famille (y_1, y_2) est liée.

Par contraposée on a donc bien montré que

$$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}.$$

Solution pour l'exercice 95 · Énoncé p. 35 · Indication p. 51 (Wronskien et multiplication)
Soit $t \in I$.

Par formule de Leibniz on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\left(gy_j\right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} y_j^{(k)} g^{(i-k)}.$$

En terme matriciels cette égalité s'écrit

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \left(gy_j\right)^{(i-1)}(t) = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\binom{i-1}{k}\right) \times \left(g^{(i-1-k)}(t) y_j^{(k)}(t)\right)$$

ce qui peut se représenter

$$\begin{pmatrix} g(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g'(t) & g(t) & 0 & \cdots & 0 \\ g''(t) & 2g'(t) & g(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} g^{(n-1)}(t) & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)}(t) & \binom{n-1}{2} g^{(n-3)}(t) & \cdots & g(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & y_2^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ y_1^{(2)}(t) & y_2^{(2)}(t) & \cdots & y_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (gy_1)^{(0)}(t) & (gy_2)^{(0)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(0)}(t) \\ (gy_1)^{(1)}(t) & (gy_2)^{(1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (gy_1)^{(n-1)}(t) & (gy_2)^{(n-1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Par passage au déterminant, déterminant d'un produit et déterminant d'une matrice diagonale on en déduit

$$\boxed{W_n(gy_1, ..., gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, ..., y_n)(t)}.$$

Remarque: il y avait de nombreuses méthodes pour utiliser la formule de Leibniz, une fois montré que pour tout $t \in I$ et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\begin{pmatrix} (gy_1)^{(i)}(t) \\ (gy_2)^{(i)}(t) \\ \vdots \\ (gy_n)^{(i)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} g^{(i-k)}(t) \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

on peut par exemple:

- ▷ Utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant,
- ▷ Utiliser des opérations du pivot.

Par exemple voici une variante utilisant le pivot:

On a par la formule de Leibniz

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = \begin{vmatrix} g(t)y_1(t) & g(t)y_2(t) & \cdots & g(t)y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

par dilatation de la première ligne on a donc

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

en effectuant pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ la transvection

$$L_i \leftarrow L_i - g^{(i-1)}(t) L_1$$

on en déduit que

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g(t)y_1'(t) & g(t)y_2'(t) & \cdots & g(t)y_n'(t) \\ 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

puis de nouveau par dilatation

$$W_n(gy_1,...,gy_n)=(g(t))^2\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t)\\ 2g'(t)y_1'(t)+g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t)+g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t)+g(t)y_n''(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_n^{(n-1-k)}(t)\end{vmatrix}$$

on continue de même en effectuant pour tout $i\in[\![3,n]\!]$ la transvection

$$L_i\leftarrow L_i-\binom{i-1}{1}g^{(i-2)}(t)L_2$$

et de manière générale en effectuant pour tout k entre 1 et n une dilatation sur la k-ième ligne puis les transvections pour tout $i\in[\![k+1,n]\!]$ de la forme $L_i\leftarrow L_i-\binom{i-1}{k-1}g^{(i-k)}(t)L_k$ on en déduit que

$$\boxed{W_n(gy_1,...,gy_n)=(g(t))^n\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}}$$